

I-33

ケーブルの分岐応答解析

長崎大学工学部 学生員 ○ 田川 賢

長崎大学工学部 正 員 高橋 和雄

1. まえがき ケーブルの非線形応答は、付随型と分岐型に分類され、そのうち付随型の振動特性の解明はかびり進んでいるが分岐型に関しては着手された段階にあり、その特性解明は未だ不十分である。面内加振のもとに生じる分岐応答には面外非線形分岐応答、分数調波共振、水平ケーブルの逆対称分岐応答の3種類が考えられる。

本研究では、このうち水平ケーブルの逆対称分岐応答特性をパラメータ解析により明らかにするものである。

2. 運動方程式 ケーブルの面内非線形運動方程式は、次式で表わされる。

$$L_1(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left( \bar{c}_0^2 \frac{1}{\lambda_e} + \bar{c}_1^2 \lambda_e^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s} + \bar{c}_2^2 \lambda_e \psi_e \frac{\partial v}{\partial s} \right\} - \bar{c}_1^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \lambda_e \frac{\partial u}{\partial s} + \psi_e \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right\} \left( \lambda_e + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] - \frac{P_2 \cos \Omega t}{\bar{P}_0} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(u, v) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left( \bar{c}_0^2 \frac{1}{\lambda_e} + \bar{c}_1^2 \lambda_e^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \bar{c}_2^2 \lambda_e \psi_e \frac{\partial u}{\partial s} \right\} - \bar{c}_2^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \lambda_e \frac{\partial u}{\partial s} + \psi_e \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right\} \left( \psi_e + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] - \frac{P_3 \cos \Omega t}{\bar{P}_0} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $u, v$ : ケーブルの面内水平、鉛直変位、 $t$ : 時間、 $\lambda_e$ : ケーブルの初期形状に沿う曲線座標、 $\bar{c}_0, \bar{c}_1$ : ケーブルの横波、縦波伝播速度、 $P_2, P_3$ : 荷重強度、 $\Omega$ : 外力の円振動数、 $\lambda_e, \psi_e$ : ケーブルの初期形状

3. 解法 式(1),(2)の解を次式のような変数分離形で仮定する。

$$u = \ell \sum_{i=1}^{\infty} R_i(t) U_i(\lambda_e), \quad v = \ell \sum_{i=1}^{\infty} R_i(t) V_i(\lambda_e) \quad (3)$$

ここに、 $R_i(t)$ : 未知の時間関数、 $U_i(\lambda_e) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ni}^A \sin \frac{n\pi \lambda_e}{\ell^*}$ 、 $V_i(\lambda_e) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ni}^B \sin \frac{n\pi \lambda_e}{\ell^*}$ : 面内線形振動の第*i*次振動形、 $\ell^*$ : 初期ケーブル長

式(3)を式(1),(2)に代入して Galerkin 法を適用すれば  $P_n$  についての連立非線形常微分方程式が次式で与えられる。

$$M_n \ddot{P}_n + \sum_{i=1}^{\infty} k_{in} P_i + k_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{ijn} R_i R_j + \frac{k_3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k_{ijkn} R_i R_j R_k = P_n \cos \omega t \quad (4)$$

ここに、 $P_2 = \bar{c}_2/\bar{c}_0$ : ケーブルの縦波-横波伝播速度比、 $\omega = \Omega/\omega_1$ 、 $\tau = \omega t$

面内対称加振のもとに生じる対称応答の自由度を  $P_1$ 、逆対称応答の自由度を  $P_2$  とすると、

$$P_1 = C_1/2 + C_1' \cos \omega \tau \quad (5)$$

$$P_2 = C_2/2 + C_2' \cos \frac{\omega \tau}{2} + S_2' \sin \frac{\omega \tau}{2} + C_1' \cos \omega \tau + S_1' \sin \omega \tau$$

式(5)を式(4)に代入し、調和バランス法を適用すれば未定定数を求める連立非線形代数方程式が得られる。これに Newton-Raphson 法を適用すれば必要の解が得られる。

4. 解析結果および考察 分岐応答は、加振振動数  $\omega = 2\omega_2$  付近の主不安定領域に生じる分岐解 ( $S_{1/2}^2, C_{1/2}^2$ ) と  $\omega = \omega_2$  付近の副不安定領域に生じる分岐解 ( $S_1^2, C_1^2$ ) の2本の曲線が構成される。また、付随応答 ( $C_1$ ) は  $\omega = \omega_1$  付近で共振状態となるため、 $\omega_1$  と  $\omega_2$  の大小関係で分岐

応答の様相が異なることが予想される。図-1, 2, 3 は付随型の主調波応答の様子を  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の大小関係で、 $k_2=30$  の水平ケーブルについて  $\gamma=0.02$  ( $\omega_1 < \omega_2$ )、 $\gamma=0.07$  ( $\omega_1 > \omega_2$ )、 $\gamma=0.026$  ( $\omega_1 = \omega_2$ ) の3ケースについて示したものである。横軸に振動数比、縦軸に振幅成分をとり、図中の実線が外力と同位相の、破線が逆位相の応答を示し、×印は分岐点を示す。図より明らかのように、付随型の応答はあらゆる振動数領域で生じるが、分岐型の応答はある

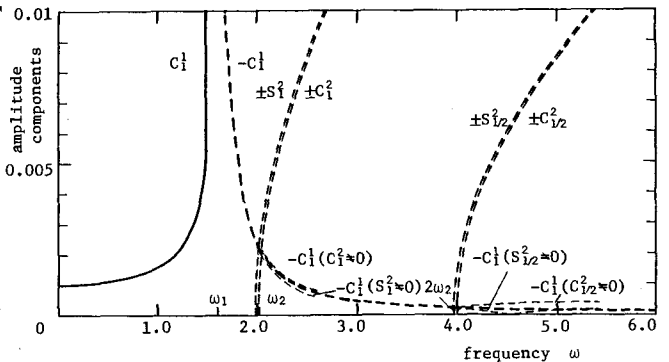


図-1 サグ比  $\gamma = 0.02$  のケーブルの逆対称分岐応答

特定の振動数領域のみで生じている。副不安定領域の分岐応答は $\gamma=0.02$ の場合、 $\omega_1 < \omega_2$ であるため外力と逆位相の、 $\gamma=0.07$ の場合、 $\omega_1 > \omega_2$ であるため同位相の応答曲線上に生じている。 $\gamma=0.026$ のケーブルでは、 $\omega_1$ と $\omega_2$ が接近するため分岐応答は同位相と逆位相の応答曲線上から別個に生じる。しかし、この場合付随応答は弱い軟化バネ特性を示すため斜線部で鉛直接線をもち、

これより上部の振動は不安定となり実在しない。そのため $\omega_1$ からの分岐応答は存在せず、分岐応答の生じる幅は $C_1^2$ の位置から逆位相の付随応答の鉛直接線の位置で規定される。また、主不安定領域に生じる分岐応答はサゲ比に無関係に $2\omega_2 > \omega_1$ であるため、常に逆位相の応答曲線上に生じる。

図-4.5は横軸に振動数比、縦軸にサゲ比をとり、水平ケーブルの主な副不安定領域を示すものであり、図中の斜線部は不安定領域の幅を示す。主不安定領域の幅は $\gamma=0.02 \sim 0.15$ の範囲で広く、他のサゲ比では狭い。副不安定領域は $\gamma=0.02 \sim 0.03$ の範囲では不安定領域の下限が鉛直接線で定まるため不連続となっている。一般に副不安定領域の幅は主不安定領域の幅より広いと言える。

5.まとめ ケーブルの逆対称分岐応答は、その発生する振動数領域はある特定のサゲ比で存在し、副不安定領域付近の分岐応答が特に重要である。弦の場合よりもはるかに広くケーブルでは生じやすいことが予想される。

#### <参考文献>

- 1) 山口・伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集第286号，S54，PP.39~47
- 2) 高橋・藤本・村中・田川：調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析，土木学会論文報告集第338号，PP.267~276，1983
- 3) 皆川：非線形振動の数値解析，日本建築学会論文報告集第279号，S54，PP.21~27

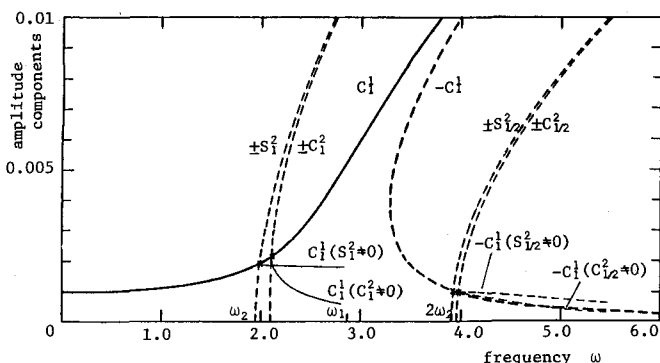


図-2 サゲ比 $\gamma=0.07$ のケーブルの逆対称分岐応答

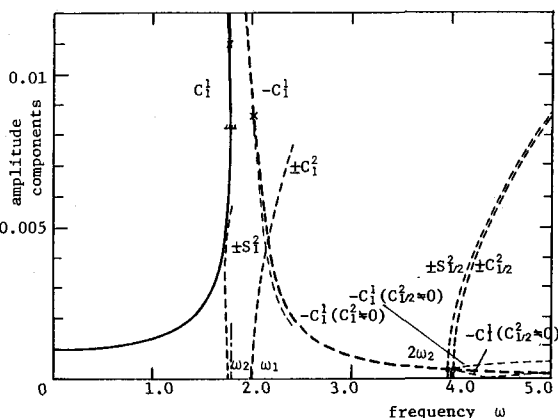


図-3 サゲ比 $\gamma=0.026$ のケーブルの逆対称分岐応答

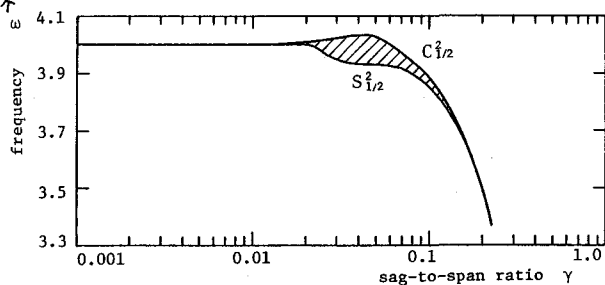


図-4 水平ケーブルの逆対称分岐応答の主不安定領域

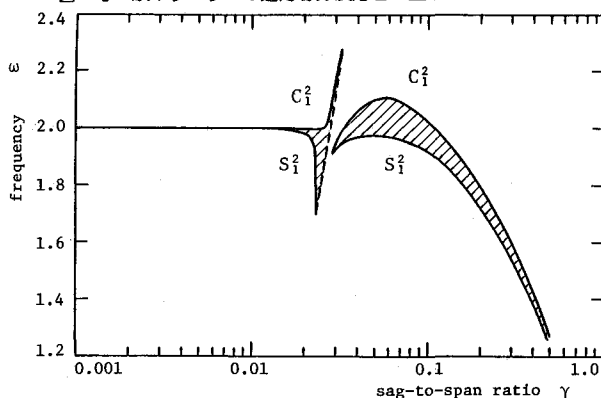


図-5 水平ケーブルの逆対称分岐応答の副不安定領域