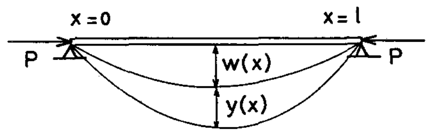
I-28　初期たわみを有する圧縮部材の非定常不規則変形解析

長崎大学工学部　○学生員　生田泰清
長崎大学工学部　　正　員　岡林隆敏
長崎大学大学院　　学生員　吉田啓三

1. はじめに

圧縮部材の座屈強度は，部材の初期不整を敏感に反映することが知られている。この初期不整は不確定な要因に基づくものであるために，圧縮部材の解析に確率論的手法を適用することが試みられている[1),(2),(3)]。本研究では，初期たわみを非定常確率過程でモデル化した場合，圧縮部材の断面力及び変形の二乗平均応答を解析する手法を提案する。本解析では，初期たわみを連続なスペクトルを有するような確率過程でモデル化している。初期たわみの自己相関関数を指数余弦関数型でモデル化した場合について，数値計算を行った。

2. 基礎方程式と初期たわみのモデル化



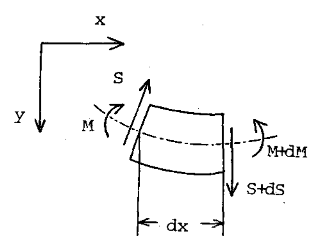
図－1

図-1に示すような初期たわみ$w(x)$を有し，軸力Pが作用する両端ヒンジの圧縮部材について考える。このとき，たわみ$y(x)$に関する変形の方程式は，次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &EI\cdot y''''(x) + P y''(x) = -P w''(x) \\ &y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ここに，EIは，曲げ剛性であり，$'$は，xに関する微分である。

さらに，軸方向に不規則な初期たわみ$w(x)$を考える。$w(x)$は，境界条件より，両端で0であり，部材上だけの有限な区間においてのみ定義されるので，非定常不規則関数となる。本研究では，この関数を任意のパワースペクトル密度を有する正規定常確率過程$r(x)$とその分散の空間的変化を表わす確率関数$g(x)$の積で，次式のようにモデル化する。



図－2

$$w(x) = r(x)\cdot g(x) \qquad (2)$$

パワースペクトル密度$S_r(\omega)$を有する定常確率過程は，白色雑音過程$N_Z(x)$を入力とする線形系の応答で表わせる。

$$d\mathbf{Z}(x)/dx = \mathbf{A}_Z \mathbf{Z}(x) + \mathbf{N}_Z(x) \qquad r(x) = \mathbf{C}\mathbf{Z}(x) \qquad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0,\ \mathbf{Z}(l) = \mathbf{Z}_l \qquad (3)$$

3. はりの方程式と初期たわみの状態空間表示

図-2のような，はりの要素において，たわみ$y(x)$，たわみ角$\phi(x)$，曲げモーメント$M(x)$，せん断力$Q(x)$を状態変数$\mathbf{Y}_{(x)}^T = [y(x)\ \ \phi(x)\ \ M(x)\ \ Q(x)]$で表示すると，(1)式は，

$$d\mathbf{Y}(x)/dx = \mathbf{A}_Y \mathbf{Y}(x) + \mathbf{N}_Y(x) \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0,\ \mathbf{Y}(l) = \mathbf{Y}_l \qquad (4)$$

のように，状態空間で表示することができる。ここに，係数行列$\mathbf{A}_Y$と外力ベクトル$\mathbf{N}_Y(x)$は，次のようになる。なお，$\alpha^2 = (l^2/EI)P$である。

$$\mathbf{A}_Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_Y(x) = [\,0\ \ 0\ \ 0\ \ \alpha^2 w(x)\,]^T$$

さらに，$\mathbf{X}_{(x)}^T = [\mathbf{Y}_{(x)}^T\ \ \mathbf{Z}_{(x)}^T]$なる状態変数を考えると，次のはり－初期たわみの方程式を得る。

$$d\mathbf{X}(x)/dx = \mathbf{A}_X \mathbf{X}(x) + \mathbf{N}_X(x) \qquad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0,\ \mathbf{X}(l) = \mathbf{X}_l \qquad (5)$$

ここで，$\mathbf{N}_X(x)$は，共分散$E[\mathbf{N}_X(x_1)\cdot\mathbf{N}_X(x_2)^T] = \mathbf{Q}_X(x)\cdot\delta(x_1 - x_2)$の正規白色雑音過程ベクトルである。

4. 不規則応答解析

ガウス確率過程は，平均値と共分散により規定できるので，以下，共分散応答について述べる。

(1)共分散方程式

(5)式の解は，次式で与えられる。 $\mathbb{X}(x)=\Phi_x(x,0)\mathbb{X}_0+\int_0^x \Phi_x(x,\lambda)\mathbb{N}_x(\lambda)\,d\lambda$ ———— (6)

共分散の定義式 $\mathbb{R}_x(x)=E[\mathbb{X}(x)\cdot\mathbb{X}(x)^T]$ に上式を代入し，若干の演算を行うと次の共分散方程式を得る。

$$\frac{d}{dx}\mathbb{R}_x(x)=\mathbb{A}_x\mathbb{R}_x(x)+\mathbb{R}_x(x)\mathbb{A}_x^T+\Phi_x(x,0)\cdot E[\mathbb{X}_0\mathbb{N}_x(x)^T]+E[\mathbb{N}_x(x)\cdot\mathbb{X}_0^T]\cdot\Phi_x(x,0)^T+\mathbb{Q}_x(x) \quad \mathbb{R}_x(0)=\mathbb{R}_0,\ \mathbb{R}_x(\ell)=\mathbb{R}_\ell \quad \text{———— (7)}$$

(2)境界条件と外力の相関関数 $E[\mathbb{X}_0\cdot\mathbb{N}_x(x)^T]$ (6)式において，$x=\ell$ の応答を考え，右辺から $\mathbb{N}_x(x)^T$ をかけて，白色雑音積分を実行すると，

$$\mathbb{B}_x'\,E[\tilde{\mathbb{X}}_\ell\cdot\mathbb{N}_x(x)^T]=\mathbb{B}_x'\,\Phi_x(x,0)\cdot E[\tilde{\mathbb{X}}_0\cdot\mathbb{N}_x(x)^T]+\mathbb{B}_x'\,\Phi_x(x,\ell)\cdot\mathbb{Q}_x(x) \quad \text{———— (8)}$$

を得る。ここに，$\mathbb{B}_x$，$\mathbb{B}_x'$ は，著者らの文献(3)で示した初期ベクトル，終端ベクトルである。

(3)初期条件の共分散 $\mathbb{R}_0$ 初期条件 $\mathbb{R}_0=0$ のもとでの共分散方程式の解を $\mathbb{P}(x)$ とすると次式が得られる。

$$\mathbb{B}_x'\cdot\mathbb{R}_\ell\cdot\mathbb{B}_x'^T=\mathbb{B}_x'\cdot\Phi_x(x,0)\cdot\mathbb{B}_x\cdot\mathbb{R}_0(\mathbb{B}_x'\cdot\Phi_x(x,0)\mathbb{B}_x)^T+\mathbb{B}_x'\mathbb{P}(\ell)\mathbb{B}_x'^T \quad \text{———— (9)}$$ [4]

この関係より，初期条件の共分散 $\mathbb{R}_0$ を得ることができる。

5. 数値解析例

数値解析例として，狭帯域過程で初期たわみをモデル化した場合について考える。自己相関関数 $R_r(x)$，パワースペクトル密度 $S_r(\omega)$ 及び，初期たわみを表現する微分方程式は，次のようになる。

$$R_r(x)=e^{-\beta x}\left(\cos\Omega x+\frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega x\right)$$

$$S_r(\omega)=S/\{\omega^2-(\beta^2+\Omega^2)\}^2+4\omega^2\beta^2$$

$$\left.\begin{aligned} &dr_1(x)/dx=r_2(x)\\ &dr_2(x)/dx=-2\beta r_2(x)-(\Omega^2+\beta^2)r_1(x)+n(x)\\ &n(x)=r(x)\cdot\sin(\pi x/\ell)\end{aligned}\right\} \quad \text{———— (10)}$$

はじめに，Jacquot[1]及び白木等のGreen関数による解法[3]との比較を行った。これらの初期たわみモデルは，本解析のモデル(10)式で $\Omega\to0$，$\beta\to0$ に対するものである。$\Omega=0.06$，$\beta=0.03$ とし，軸力のパラメータ $\alpha=2.0$ において，白木等の計算例[3]と比較すると，小数点以下5桁まで一致する。図-3は，Ω，β を上記の値にとり α を1.2，1.6，2.0，2.4，2.8 と変化させたときの初期たわみの標準偏差を示したものである。この結果は，Jacquot[1]の結果と一致する。なお，横軸は，支間長である。

さらに，初期たわみの波数の変化に対する部材のたわみの変動の挙動を示したものが図-4である。$\alpha=2.0$，$\beta=1.0$ で一定とし，$K\ (=\Omega/2\pi)$ の値を0.5，0.75，1.0，1.5，2.0 と変化させたものである。初期たわみの波数の変化に伴って，たわみの変動は変化することがわかる。これらの結果を用いて，圧縮部材の信頼性解析を実施した。これらの結果は，講演時に発表する。

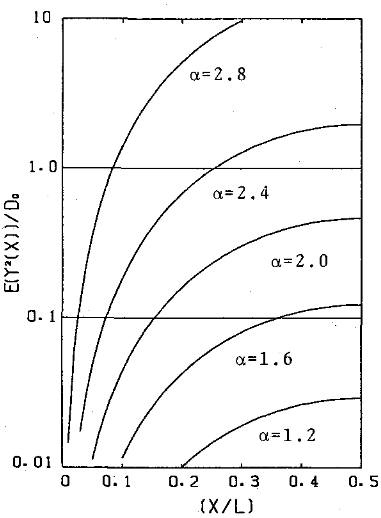


図-3

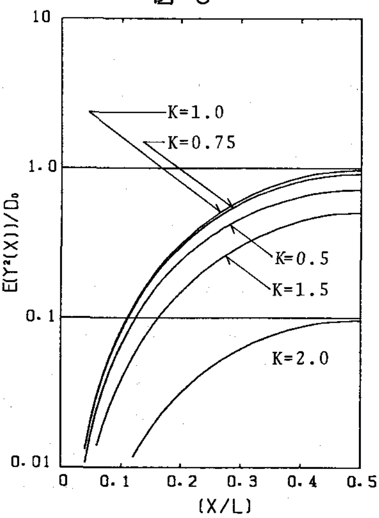


図-4

[参考文献] (1)Jacquot,R.G.,ASCE,Vol.98,No.EM5,pp1173~1182,Oct.,1972
(2)吉村虎蔵；昭和53年度，土木学会西部支部，講演集 I-6，pp11-12，(3)白木他；土木学会論文報告集 第297号，1980年5月，(4)岡林隆敏；土木学会論文報告集，1983年12月