

I-27

面内曲げを受ける長方形板の振動解析

長崎大学工学部 学生員・井上修二

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき 動的な面内荷重の作用のもとで、プレートガーダー橋の腹板と上フランジとの溶接部に疲労クラックが生じたり、腹板の振動による騒音が生ずることが知られている。これらの現象は腹板の面内曲げによって生ずるものである。著者らは面外変形の発生メカニズムとして面外動的不安定振動(パラメーター励振)に注目して解析を進めている。面外振動の安定性を検討するためには、まず腹板の固有振動数、固有振動形、減衰定数などの固有振動特性が解明されていることが必要である。そこで、本研究は腹板を上下フランジと垂直補剛材で囲まれた長方形板としてモデル化し、これにプレートガーダーの曲げによる面内力の影響を考慮した振動解析を行うものである。なお、長方形板の境界条件としては単純支持と固定の組合せからなる4ケースを想定した。解析にはGalerkin法を採用し、座屈および固有振動特性に及ぼす境界条件および固有振動数に及ぼす面内曲げの影響を明らかにするものである。

2. 解法 Fig.1に示すような長方形板に x, y 座標を導入し、 x, y 平面に対して直角方向を z 軸とする。 $x=0, a$ の2辺上に面内曲げモーメント M_0 による面内力が作用する場合の長方形板の面外方向の変位 $w(x, y, t)$ に関する運動方程式は次式で与えられる。

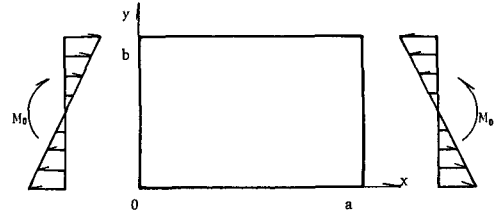


Fig.1 Co-ordinates

$$L(w) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 ρ : 板の密度、 h : 板厚、 w : たわみ、 t : 時間、 $D = E h^3 / 12(1-\nu^2)$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアソン比、 $N_x = \frac{b}{a}(1-2\nu)M_0$: 面内力、 M_0 : 曲げモーメント、 b : 荷重辺の長さ

式(1)の解を次のように仮定する。 $w = h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (2)$

W_{mn} は梁の座屈波形を用いて次のように仮定する²⁾。

case I (全周単純支持)

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$$

case II (荷重辺単純支持, 他辺固定)

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \left\{ \cos \frac{(n-1)\pi}{b} y - \cos \frac{(n+1)\pi}{b} y \right\}$$

case III (荷重辺固定, 他辺単純支持)

$$W_{mn} = \left\{ \cos \frac{(m-1)\pi}{a} x - \cos \frac{(m+1)\pi}{a} x \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

case IV (全周固定)

$$W_{mn} = \left\{ \cos \frac{(m-1)\pi}{a} x - \cos \frac{(m+1)\pi}{a} x \right\} \left\{ \cos \frac{(n-1)\pi}{b} y - \cos \frac{(n+1)\pi}{b} y \right\}$$

式(2)を式(1)に代入してGalerkin法を適用する。 $\int_0^a \int_0^b L(w) W_{rs}(x, y) dx dy = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$

次のような一般座標 T_{mn} に関する運動方程式が得られる。 $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\rho h a^2}{D} I_{mr}^2 I_{ns}^2 T_{mn} + I_{mr}^2 I_{ns}^2 T_{mn} + \frac{6 M_0 a^2}{D b^2} I_{mr}^3 I_{ns}^3 T_{mn} \right\} = 0 \quad (4)$

ここに、 $I_{mr}, I_{ns} (i=1, 2, 3, \dots)$ はGalerkin法の積分項

$T_{mn} = e^{i \omega t} A_{mn}$ において、さらに無次元化すれば次のような同次方程式が得られる。

$$(-\alpha^2 [A] + [B] + \lambda_{cr} [C]) X = \{0\} \quad (5) \quad \text{ここに } \alpha^2 = \frac{\rho h \omega^2 a^2}{D} : \text{振動の固有値}, \lambda_{cr} = \frac{6 M_0 a^2}{b^2 D} : \text{座屈固有値},$$

$\bar{M}_0 = M_0 / M_{cr}$: 無次元曲げモーメント、 M_{cr} : 座屈曲げモーメント、 X : A_{mn} を列要素とするベクトル

なお、 $\alpha = 0$ とおけば $([B] + \lambda_{cr} [C]) X = \{0\} \quad (6)$ より座屈固有値が得られる。さらに式(5)より曲げモーメント $\bar{M}_0$ の作用する長方形板の固有値 α が与えられた辺長比 $\mu = b/a$ のもとに計算される。

case IおよびII、つまり荷重辺単純支持の場合には、 m と R の連成はない。この2ケースについては式(2)は、

$w = \sum_{m=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y)$ と仮定でき、計算が簡略される。式(5)、(6)の固有値および固有ベクトルの計算には通常の計算機のライブラリーを使用した。座屈解析の場合に $[C]$ の逆行列 $[C]^{-1}$ が必要であるが、 $[C]$ 行列は対角線要素が零であるために、逆行列の計算が不可能であると判明した。このために λ_{cr} の逆数 $1/\lambda_{cr}$ を求める方法を適用した

。数値計算にあたっては計算の精度および計算機の容量から $m, n=10$ 項まで採用した。

3. 数値結果 (1) 座屈解析 Fig. 2 は各ケースの座屈係数 k ($k_{cr} = k_{Euler}$) と縦横比 $1/\mu$ との関係プロットしたものである。本法による解は case I, II に対して既往の解と一致した。これらの結果を一様圧縮力の場合と比較すると同じ傾向を示すが、 x 方向の波数は曲げモーメント荷重の場合が多い結果となっている³⁾

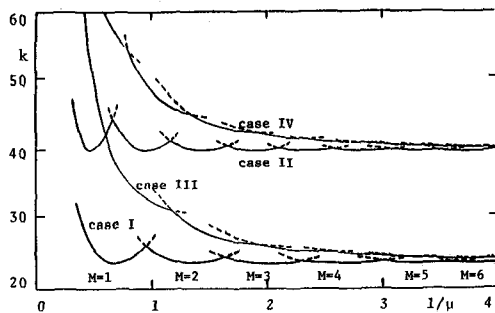


Fig. 2 Critical value k vs aspect ratio $1/\mu$

(2) 固有振動特性 面内曲げモーメント $\bar{M}_0$ による固有振動

数の変動を示せば、case III, IV に対して Fig. 3, 4 に示す。図において横軸 $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ は $\bar{M}_0$ 固有振動数を 1 次の固有振動数で無次元化した振動数比である。図中の記号 (M, N) は x 方向の波数 M , y 方向の波数 (次数) N を意味する。ただし、case IV においては x 、 y 方向の波数に区別しにくい $\boxtimes(3, 1)$, $\boxplus(1, 3)$, $\boxtimes(4, 2)$, $\boxplus(2, 4)$, $\boxtimes(5, 1)$, $\boxplus(1, 5)$ のような振動形が $\bar{M}_0 = 0$ の場合

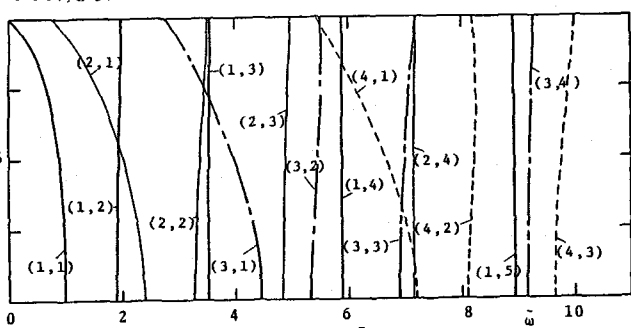


Fig. 3 Moment $\bar{M}_0$ vs frequency $\bar{\omega}$ for case III

に存在するので²⁾これらについてはアンダーラインを引いて区別している。図のように y 方向の波数 $N=1$ の場合、つまり $(M, 1)$ の振動形を持つ固有振動数は曲げモーメント $\bar{M}_0$ の増大につれて低下する。特に座屈波形を与える $(1, 1)$ (case III), $(2, 1)$ (case IV) の固有振動数は $\bar{M}_0 = 1$ で零となる。したがし、 y 方向の波数が 2 以上の固有振動数は低下せず、ほぼ等しいか、逆に増大している。この事実は case I ~ IV すべてについて成立するもので、曲げモーメント荷重を受ける場合の特性と考えられる。

Fig. 5 に case II の曲げモーメント $\bar{M}_0$ による固有振動形の変動を示す。 $\bar{M}_0$ の増大とともに振幅の最大値は圧縮側に移動し、引張側の振幅は小さくなる。したがって、面内曲げを受ける腹板の上部曲げ応力は大きくなるが予想される。

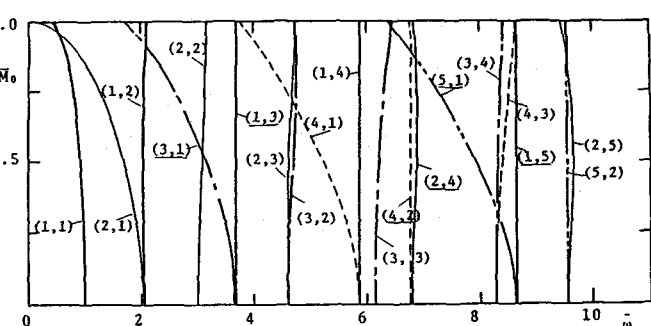
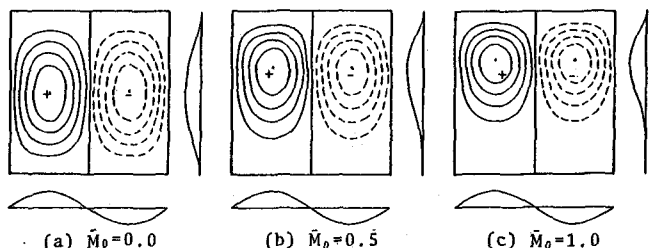


Fig. 4 Moment $\bar{M}_0$ vs frequency $\bar{\omega}$ for case IV



Variation of modal shapes of vibration Fig. 5

4. まとめ 鉄道橋プレートガーダーの腹板の固有振動数の実験値との比較、固有振動数に及ぼす応力勾配 (曲げ・軸力) の影響については講演時に発表する。

参考文献 1) 高橋・田川・池田・松川: 土木学会論文報告集, 第341号, 1984-1 2) 八巻・永井: 東北大学高速力学研究所報告, 第36号, 1975 3) 福本: 構造物の座屈・安定解析, 培風館, 1982