

I-26

ラグランジュ乗数を用いた平板の自由振動解析

長大<sup>○</sup> 鎮地恒夫、山下 務

1. まえがき レイレ・リッツ法は板の自由振動解析の有効な一方法として、従来から研究され応用されている。レイレ・リッツ法を使用するには、先ず、幾何学的境界条件を満たす板の変位関数を仮定する必要がある。その関数の一つとして、次のように仮定するといわれている<sup>(1)</sup>。

$$w = (a_1x + b_1y + c_1)^{r_1} (a_2x + b_2y + c_2)^{r_2} \cdots (a_rx + b_ry + c_r)^{r_r} \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j \quad (1)$$

ここに、 $a_i x + b_i y + c_i = 0$  ( $i=1, \dots, r$ ) は板の各辺の目の辺の方程式、 $a_{ij}$  は未知定数である。しかし、このたわみ関数を使うことは、(i)一つの辺上の境界条件は内である、(ii)板は凸多角形である、(iii)板の形状が簡単でエネルギーの積分が簡単に行える、という制限がある。そこで、本報告では、上記制限を解消するレイレ・リッツ法とラグランジュ乗数を用いて提示し、代表的な問題に適用してその有用性を明らかにする。

2. 解析に必要な基礎式 図1に座標軸を示す。板の曲げ変位と  $w(x, y)$  とすると、板の自由振動に関する汎関数は、幾何学的境界条件をラグランジュ乗数によって付加することにより、次のように書ける<sup>(2)(3)</sup>。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \iint_A [(w_{xx} + w_{yy})^2 + 2(1-\nu)(w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy})] dx dy \\ & + \sum_{r=1}^{n_r} F_r w(x_r, y_r) + \sum_{t=1}^{n_t} \int_0^{l_t} \bar{V}_t(s) w ds + \sum_{u=1}^{n_u} \int_0^{l_u} \bar{M}_u(s) (w_{xx}\alpha_u + w_{yy}\beta_u) ds \\ & - \frac{1}{2} \iint_A \gamma h \omega^2 w^2 dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

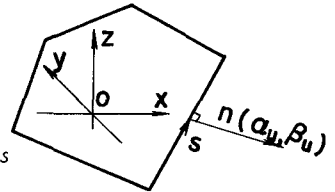


図1 座標軸

ここに、 $D$  は板の曲げ剛性、 $\nu$  はポアソン比、 $\gamma$  は板の密度、 $h$  は板厚、 $\omega$  は角振動数、 $w_{xx} = \partial^2 w / \partial x^2$  以下同様である。また、 $F_r, \bar{V}_t(s), \bar{M}_u(s)$  はラグランジュ乗数で、右辺の各2項は板の  $r$  番目の角の変位  $0$  の条件、 $x_r, y_r$  は同角の座標、各3項は  $t$  番目の辺の変位  $0$  の条件、各4項は  $u$  番目の辺の法線方向のたわみ角  $0$  の条件を示す項で、 $\alpha_u, \beta_u$  は  $u$  番目の辺の外法線方向の余弦である(図1)。

$\bar{W} = w/a, \bar{X} = x/a, \bar{Y} = y/a, \bar{S} = s/l, \bar{L} = l/a, \bar{F}_r = F_r a/D, \bar{V}_t = \bar{V}_t a^2/D, \bar{M}_u = M_u a/D, \bar{A} = A/a^2, \bar{\Pi} = \Pi/D$  ( $a$  は板の代表寸法、 $l$  は辺の長さ) なる無次元化を(1)式に行い、たわみ  $\bar{W}$ 、ラグランジュ乗数  $\bar{F}_r, \bar{V}_t, \bar{M}_u$  を次のように仮定する。

$$w = \sum_i \sum_j a_{ij} X^i Y^j = \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{W}_{ij}, \quad \bar{F}_r = b_r, \quad \bar{V}_t = \sum_p C_{tp} \bar{S}^p = \sum_p C_{tp} \bar{V}_{tp}, \quad \bar{M}_u = \sum_g d_{ug} \bar{S}^g = \sum_g d_{ug} \bar{m}_{ug} \quad (2)$$

$\delta \bar{\Pi} = 0$  (12)式を代入すると、未知定数  $a_{ij}, b_r, C_{tp}, d_{ug}$  に関する同次連立方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (E_{ijIJ} - \lambda^2 G_{ijIJ}) a_{ij} + \sum_{r=1}^{n_r} H_{rIJ} b_r + \sum_t \sum_p K_{tpIJ} C_{tp} + \sum_u \sum_g L_{ugIJ} d_{ug} &= 0 \\ \sum_i \sum_j H_{ijR} a_{ij} &= 0 \quad (R = \dots, n_r) \quad (I = \dots, n_t, J = \dots, n_j) \\ \sum_i \sum_j K_{ijTP} a_{ij} &= 0 \quad (T = \dots, n_t, P = \dots, n_p) \\ \sum_i \sum_j L_{ijUQ} a_{ij} &= 0 \quad (U = \dots, n_u, Q = \dots, n_g) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\lambda^2 = \gamma h a^4 \omega^2 / D$  は板の自由振動に関する固有値である。また、

$$\begin{aligned} E_{ijIJ} &= \iint_A [w_{ij,xx} w_{IJ,xx} + w_{ij,yy} w_{IJ,yy} + \nu (w_{ij,xx} w_{IJ,yy} + w_{ij,yy} w_{IJ,xx}) + 2(1-\nu) w_{ij,xy} w_{IJ,xy}] dx dy \\ G_{ijIJ} &= \iint_A w_{ij} w_{IJ} dx dy, \quad H_{rIJ} = X_r^I Y_r^J, \quad K_{tpIJ} = \int_0^{l_t} \bar{V}_{tp} w_{IJ} d\bar{S}, \quad L_{ugIJ} = \int_0^{l_u} \bar{m}_{ug} w_{IJ} d\bar{S} \quad (4) \end{aligned}$$

∴  $w_{ij,xx} = \partial^2 w_{ij} / \partial x^2$  以下同様である。(4) 式の面積積分は一般に、

$$\iint_A \frac{\partial^{p+q} w_{ij}}{\partial x^p \partial y^q} \frac{\partial^{p+q} w_{ij}}{\partial x^p \partial y^q} dx dy = \iint_A \frac{\partial^p X^i}{\partial x^p} \frac{\partial^q Y^j}{\partial y^q} \frac{\partial^p X^i}{\partial x^p} \frac{\partial^q Y^j}{\partial y^q} dx dy = \frac{i!}{(i-p)!} \frac{j!}{(j-q)!} \frac{i!}{(i-p)!} \frac{j!}{(j-q)!} \iint_A X^{i-p} Y^{j-q} dx dy \quad \dots (5)$$

と表わされるが、この面積積分を部分積分して板の境界に沿った線積分とする。すなわち、

$$\iint_A X^M Y^N dx dy = \iint_A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{M+1} X^{M+1} Y^N \right) dx dy = \sum_{v=1}^n \frac{\alpha_v}{M+1} \int_0^{L_v} X^{M+1} Y^N d\bar{s} \quad \dots (6)$$

∴  $n$  は辺の数である。 $v$  番目の辺の方向余弦  $\alpha_v, \beta_v$  は次式から計算される(図2参照)。

$$L_v = \sqrt{(X_{v2} - X_{v1})^2 + (Y_{v2} - Y_{v1})^2}, \alpha_v = (Y_{v2} - Y_{v1}) / L_v, \beta_v = -(X_{v2} - X_{v1}) / L_v$$

また、 $v$  辺上の点の座標  $X, Y$  は

$$X = X_{v1} - \beta_v \bar{s}, Y = Y_{v1} + \alpha_v \bar{s} \quad \dots (7)$$

と書けるので、これを用いて(4),(6)式の線積分を計算する。

$$\begin{aligned} \int_0^{L_v} \bar{s}^R X^P Y^Q d\bar{s} &= \int_0^{L_v} \bar{s}^R (X_{v1} - \beta_v \bar{s})^P (Y_{v1} + \alpha_v \bar{s})^Q d\bar{s} \\ &= \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^Q \frac{P!}{(P-i)! i!} \frac{Q!}{(Q-j)! j!} X_{v1}^{P-i} Y_{v1}^{Q-j} (-\beta_v)^i \alpha_v^j \frac{L_v^{R+i+j+1}}{R+i+j+1} \end{aligned} \quad \dots (8)$$

図2 方向余弦

(5)~(9) 式を用いると(3)式の係数(4)式がすべて板の境界に沿った線積分で計算できるため、板の形状に関係なくエネルギーの計算が可能となり、また、境界条件はラグランジュ乗数を用いて付加できるため、いかなる境界条件の場合にも適用できることとなる。(3)式の係数が計算できれば、振動の固有値入および固有モードは通常の固有値問題と同様にして求められる。

### 3. 解析例 部分固定正方形板(図3)

表1 共振固有数 (Hz)

一辺の  $\delta$  ( $\delta \leq 1$ ) 部分を固定した片持ち正方形板の共振振動数 (Hz) の解析値と実験値を表1に示す。解析には表に示す近似乗数を用いた。

実験は一辺 200 mm, 厚さ 2 mm のアルミニウム合金試験片(ヤング率 71 GPa,  $\nu = 0.33$ , 比重 2.8) によって行い、試験片に貼ったひずみゲージの出力により共振点を判定した。また、図4は  $\delta = 0.5$  の場合の 3, 5 次共振時の 1-ゲルラインの位置を示す。

文献 (1) S. Timoshenko, Vibration Problems in Engineering, D. Van Nostrand Co. (1955), (2) K. Washizu, Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, (1970), (3) S. T. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, Mc-Graw Hill, Kogakusha

| $\delta$            | 1.0         |      | 0.7         |      | 0.5         |      | 0.3         |      |
|---------------------|-------------|------|-------------|------|-------------|------|-------------|------|
| 次数                  | 実験値         | 解析値  | 実験値         | 解析値  | 実験値         | 解析値  | 実験値         | 解析値  |
| 1                   | 40.5        | 41.8 | 36.6        | 38.7 | 31.1        | 33.9 | 23.5        | 25.9 |
| 2                   | —           | 101  | 90.0        | 91.6 | 73.1        | 78.7 | 55.2        | 57.1 |
| 3                   | 255         | 255  | 218         | 220  | 170         | 178  | 141         | 142  |
| 4                   | 326         | 332  | 304         | 324  | 276         | 292  | 263         | 273  |
| 5                   | —           | 369  | 333         | 336  | 320         | 330  | 304         | 307  |
| 6                   | 637         | 647  | 481         | 528  | 414         | 435  | 390         | 397  |
| 7                   | 710         | 756  | 663         | 707  | 609         | 672  | 507         | 538  |
| 8                   | —           | 799  | 737         | 764  | 721         | 747  | 708         | 740  |
| $W, F, \nu, \mu$ の値 | 35, 2, 3, 3 |      | 35, 2, 2, 2 |      | 36, 2, 2, 2 |      | 35, 2, 1, 1 |      |

図4  $\delta = 0.5$  板の 1-ゲルライン

解析 (3次) 実験

解析 (6次) 実験

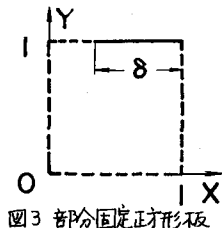


図3 部分固定正方形板

