

I-22

マイコンによる構造物の多元連立方程式の解法(その1)

九州学院大学 工学部 正 員 塚本 正文

1 まえがき

最近マイコンの普及はめざましく、その簡便さから構造力学の解析にもさかんに行われている。しかし、わが国が取り扱う構造解析の多元連立方程式の左辺係数(構造物の性状係数)のマトリックスはそのほとんどが対角線項に対して対称型である。この連立方程式をマイコンを利用して解く場合、中、大型のコンピュータを利用する時と異なりメモリーと演算速度について特別の配慮が必要である。著者は左辺係数の対称性を利用してメモリーの節約と種々の解法によるプログラムの演算速度を比較してみたのが、本報と本文で報告する。これらのプログラムはすべて著者が作成したものである。

2 左辺係数の処理と解法

著者はまず、メモリーを節約するために左辺係数のマトリックスを対角線項(対称軸)から上、下は下半分の要素だけの1次元配列とした図-1と、左辺係数は0要素が多いので非0要素だけをとり出してバンド巾を持つ2次元配列のバンドマトリックスの図-2の解析プログラムを考えた。

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ A_2 & A_3 & & & \\ & A_4 & A_5 & & \\ A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & \\ & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \end{bmatrix} \text{ SYM.}$$

図-1

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & & \\ & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \\ & & A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ & & & A_{4,1} & A_{4,2} & 0 \\ & & & & A_{5,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

図-2

図-1では、N元の場合要素数は $N(N+1)/2$ 、図-2ではバンド巾をBとすると $N \cdot B$ となる。したがって図-1では配列配りのメモリー節約は $N(N-1)/2$ 、図-2では要素番号註記のための配列 $N \cdot B$ を省いて $N^2 - 2N \cdot B$ となる。

著者が作成した数多くのプログラム中本報告では、図-1の1次元配列の連立方程式を 1 ガウスの消去法

2 逆マトリックス法 3 共役勾配法 4 コレスキー法

図-2のバンドマトリックス法で表わされる連立方程式を 1 ガウスの消去法 2 ガウス・ザイデルの逐次近似法を用いた。プログラミングに際しては1つの構造物に対し、この構造物の種々の荷重状態の解析結果

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ A_2 & A_3 & & & \\ A_4 & A_5 & A_6 & & \\ A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} & \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix}$$

図-3

を得る目的で左辺係数の処理演算と右辺ベクトルの演算を分離する左右分離型のものを作成するようにした。図-3の場合がそれである。あるいは一度左辺係数を処理すれば、荷重状態の数だけ右辺の数値をインプットすればよい。

使用機種はPC-8800(8ビット)とPC-9800(16ビット)である。

3 演算速度と結果

上記2機種を用い、20元の連立方程式を荷重状態1つの場合の演算所要時間とデータインプット後のTIMEを測って出力させた結果は次表のとおりである。

プログラム名	使用機種	左辺係数 処理	右辺演算	計	演算速度にから見たものはコレ スケー法、最も普遍的なガウ ス消去法が優れていることを 確認した。 以下各算法のプログラミン グについて著者の見解を述べ る。
ガウス消去法	PC-8800	1'06"	17"	1'23"	
逆マトリックス法	PC-8800	4'	37"	4'37"	
共役こう配法	PC-8800			7'50"	
コレスケー法	PC-8800			1'18"	
バンドマトリックス					
ガウス消去法	PC-9800	3"	1'10"	1'13"	
ガウス・ガイデル法	PC-9800	0"	7'44"	7'44"	

- 1 ガウス消去法 最も簡単に手軽にプログラミングができる。万人に推奨できるプログラムである。
- 2 逆マトリックス法 逆マトリックスそのものが性数係数であり、このマトリックスを必要とする場合は是非作成しておかなくてはならない。左右分離型の最典型的なプログラムである。しかし左辺係数の処理の単純さとその演算時間の長いことを覚悟しなければならぬ。特に大次元の場合は計算精度を考えると倍精度演算が望ましい。
- 3 共役こう配法 逐次近似法の1つであり、理論的に N 回の連立方程式は N 回のループ演算で収束する筈であるが、実際は計算途中の丸めの誤差が入って収束しない。 $2N$ 回ぐらいのループのプログラムにしなければならぬ。しかも2倍の演算時間が必要で、平方根演算がはいりプログラムとしてとりかえ難いと思われ、メモリが利用してかきとガウス消去法と同様便利である。
- 5 バンドマトリックス法によるガウス消去法 手軽に多くの面倒さはあるが、メモリ節約、演算速度の両方から見て有利な方法である。
- 6 バンドマトリックス法によるガウス・ガイデル法 ガウス・ガイデルの逐次近似法と特に留意しなければならぬのは、対角線理の要素がその行の他の要素にくらべてずばぬけて大きい場合に限り収束がよいことで、あくとも2倍以上の大きさのときに限り利用するようになる。それ以外は収束がよなく、時として発散するのを要意である。

著者が作成したプログラムの大きさと行数を表わすと次表のとおり、いずれも100行内外にあさつてゐる。

プログラム名	メイン	サブ	計	解の計算精度は、解と原式に代入して残差を決定する際のプログラムを準拠して確かめたところ、いずれのプログラムも十分な精度を得ることができた。
ガウス消去法	55	28	83	
逆マトリックス法	42	64	106	4 使用メモリー
共役こう配法	43	43	86	入力の枚数は未使用メモリーのコマンド(例えばFRE)を待つことのでプログラム実行後未使用容量を出力させて、そのプログラムの使用メモリーを確認することが出来る。
バンドマトリックス				プログラムのメモリーは方程式の元数に支配されることにもちろんである。
ガウス消去法	53	40	93	
ガウス・ガイデル法	57	38	95	

5 むすび

構造物解析の多元連立方程式の左辺係数は対角線理に対して対称型が殆んどであるので本文で示したように、対角線理の上、または下半分を利用してプログラミングし、かつ演算速度の早いものを選択するとよい。

参考文献 FORTRAN数値計算ハンドブック(オーム社) 数値解析とFORTRAN(丸善)

数値計算工務設計(新巻 朝倉書店) 共役こう配法(戸川 啓成出版) その他