

I-19 節点消去法を用いた構造物の一塑性解析法

九州大学 エ・正 今井富士夫, 正 太田俊昭
九州大学 エ・学 興石正乙, 正 冉一元

1. まえがき

一般に構造物の塑性挙動を有限要素法により解析する場合、要素分割数が増せばその系の自由度は飛躍的に増大しかつ非線形なこともあって収束に要する計算時間は膨大となる。一方このような多くの有限要素によって組み立てられた系のマトリックスの大きさを縮小し、方程式を解くのに必要な計算時間を短縮する手法として、しばしば用いられるものに縮約法がある。本研究は、橋の全体構造の解明を目的としているが、その解析に当っては多大な方程式の縮小化が実用に不可欠と考えられる。そこで、ここではその前段階として、塑性解析法における縮約法の有用性を検討するため、平板問題を例にとり節点消去法を用いた場合と従来の手法を比較し精度ならびにCPU時間等について検討を加えた。

2. 塑性解析法^{21,22)}

解析にあたって面外問題は、塑性ヒンジ線理論を用い、要素としては塑性曲げを要素辺で表現しうるMorleyの要素モデル(図-1)を採用した。

即ち図-1において変形の適合条件式は、 $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}_e \dot{\mathbf{U}}_i - \dot{\mathbf{\Theta}}_p$ (1)

ここに、 $\dot{\mathbf{U}}$ は各辺の接線角増分 $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$ $\dot{\mathbf{\Theta}}_p$ は塑性不連続角増分である。

次に仮想仕事の原理より、辺モーメント増分 $\dot{\mathbf{M}}$ と $\dot{\mathbf{U}}$ の関係は、 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}}$ (2)

また外力増分 $\dot{\mathbf{P}}$ と $\dot{\mathbf{M}}$ との力のつりあい式は反傾関係より $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_e^T \dot{\mathbf{M}}$ (3)

さらに降伏条件式を次のように定義する。 $\Phi = M_n^2 + M_s^2 - M_n M_s + 3M_n^2 - M_o^2 = 0$ (4)

式(4)に塑性流れ理論を適用することによって降伏条件、および塑性不連続角増分 $\dot{\mathbf{\Theta}}_p$ は

$$\mathbf{A}_p^T \dot{\mathbf{M}} = 0 \quad (5) \quad \dot{\mathbf{\Theta}}_p = \mathbf{A}_p \dot{\lambda} \quad (6)$$

上記の式(1),(2),(3),(5)および(6)を用いて各要素の外力と変形の関係式が求まる。

次に面内問題は、ロイスの式による弾塑性理論を採用し、要素としては図-2に示すような6自由度をもつ三角形要素を用いた。

仮想仕事の原理により、各要素の外力と変形の関係は

$$\mathbf{F} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} \quad (7)$$

ここに、 $\mathbf{t}$ は板厚、 $\mathbf{A}$ は要素面積、 $\mathbf{B}$ は座標値を含む係数マトリックスである。

また降伏した要素に関して、ひずみ増分は式(8)で応力増分は式(9)で表わされる。

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}_e + d\boldsymbol{\epsilon}_p \quad (8) \quad d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\epsilon}_e = \mathbf{D}_e (d\boldsymbol{\epsilon} - d\boldsymbol{\epsilon}_p) \quad (9)$$

降伏関数を式(10)で定義すれば、塑性ひずみ増分は式(11)で与えられる。

$$f = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (10)$$

$$d\boldsymbol{\epsilon}_p = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} \quad (11)$$

上記の式(9),(10),および(11)より降伏した要素の応力増分は式(12)で表わされる。

$$d\boldsymbol{\sigma} = \{ \mathbf{K} - \mathbf{D}_e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D}_e / (8 + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}_e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) \} d\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_p d\boldsymbol{\epsilon} \quad (12)$$

収束計算には初期応力法を用いた。これは塑性になった要素を弾性とみなし、そのために生じる不釣り合い外力 $\Delta \mathbf{P}$ を求め、これを見かけの外力として弾性変位増分を算出し、逐次計算する方法である。各要素の応力増分は式(13)で、降伏した要素の応力増分は式(14)で表わされる。

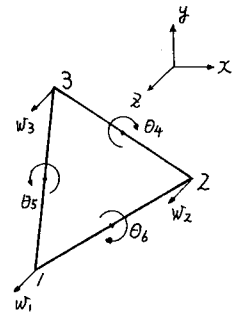


図-1

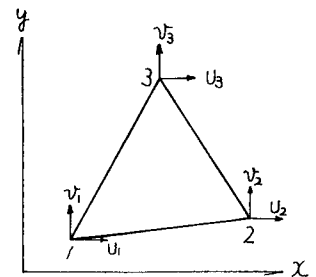


図-2

$$d\sigma_e = D_e \varepsilon_e \quad (13)$$

$$d\sigma_p = D_p \varepsilon_p \quad (14)$$

式(13)と式(14)から不釣合応力を算出し、見かけの節点力 ΔP を求めると

$$\Delta P = t \int_A B^T \Delta \sigma dA \quad (15)$$

式(15)から ΔP による変位増分は、 $\Delta U = K_e^{-1} \Delta P$ (16)

上記の式(13)～式(16)を用いて繰り返し計算を行えば、要素内の不釣合応力は $\Delta \sigma \rightarrow 0$ となり不釣合外力も $\Delta P \rightarrow 0$ となる。(図-3参照)

3. 縮約法⁹⁾

塑性解析法によって誘導された各要素の剛性マトリックスを合成することによって作成される全体剛性マトリックスを K とすれば、全体外力 F と全体変位 U の関係は式(17)で与えられる。 $F = KU$ (17)

式(17)において消去する節点に添字 B、残りの節点に添字 C をつけて区別すれば次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} F_C \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_C \\ U_B \end{Bmatrix} \quad (18)$$

式(18)から $U_B = -K_{22}^{-1} K_{21} U_C + K_{22}^{-1} F_B$ (19) $F_C - K_{12} K_{22}^{-1} F_B = (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) U_C$ (20)

式(20)から U_C を求め式(19)に代入することによりすべての未知変位を求めることができる。またこの場合最も合理的な消去点の数は、 $f(n_B) = (n - n_B)^2 + n_B^2$ の極値を求めることにより $n_B = n/2$ となるので全節点数の約半分を消去節点に選べばよいことがわかる。

4. 解析結果

ここでは、四辺単純支持の等方性板に等分布荷重をかけた場合と中央点に集中荷重をかけた場合の崩壊過程を図-4に示す。破線は節点を消去した要素であり、太い実線は塑性ヒンジ線および番号はその発生順序を表わしている。本手法による崩壊過程は従来のものと一致し、その終局荷重は極限解析によって得られた解にはば一致している。また CPU 時間は、従来の方法では 7.75 秒であったのが 6.34 秒となり約 20% 短縮された。また剛性マトリックスの次元は従来の約 1/2 である。

5. あとがき

今回は平板の曲げ弾塑性問題で本手法の適用性を検討してみたが、計算時間およびマトリックスの縮小化の二点において従来の方法より有効であることが確認された。今後橋梁全体を解析する際には、マトリックスの次元は膨大となることが予想され、本手法の利用価値は高いと思われる。なお面内弾塑性問題の解析例は当日会場で発表予定である。

参考文献

- 1) K.H. Huebner: 有限要素法, 科学技術出版社 1978
- 2) 山本等: 日本造船学会論文集, 第 145 号 1979
- 3) 田島等: 昭和 56 年度土木学会西部支部講演集 1982
- 4) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性, 培風館 1972

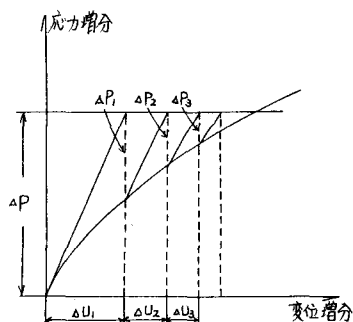


図-3

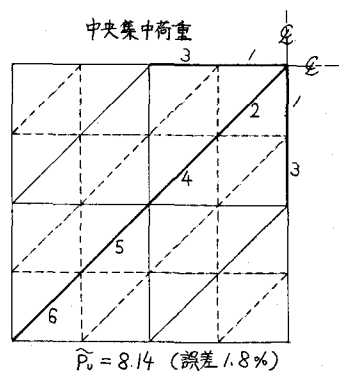
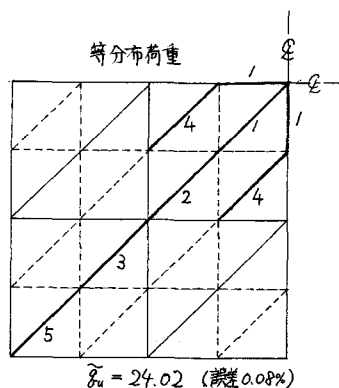


図-4