

I-16

平板の座屈の一解析法

長崎大学 正員 ○松田 浩
長崎大学 正員 崎山 毅

1. まえがき

筆者らは、先に、変厚板の曲げ解法として、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用によって得られる解析的近似解にもとづく解法を提示し、その実用性を検証するとともに、任意の境界条件、荷重条件および変断面性をもつ変厚板の曲げに対する解法の汎用性を明らかにした。(1)

本報告は、先に提示した変厚板の曲げ解法の変厚矩形板の座屈解析への応用性について検討したものである。

2. 基礎方程式

平板の座屈の基本式は、横荷重と面内力とを同時に受ける荷重系を対象としたものである。この場合、横荷重は等分布荷重とし、面内力は一方向に均一に圧縮されているものとする。

平板のせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w とすると、曲げと面内力とを同時に受ける矩形板の基礎微分方程式は次の連立偏微分方程式になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -g_x - N_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} &= \frac{M_y}{D}, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{2}{D(1-\nu)} M_{xy}, \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{G t_s}, \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{G t_s} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $g = g(x, y)$: 横荷重強度、 N_x : 面内圧縮力、 E : 弾性係数、 G : せん断弾性係数、 ν : ポアソン比
 $t_s = t(x, y)$: 板厚、 $D = E t^3 / 12(1-\nu^2)$: 板剛度、 $t_s = t / 1.2$

(1)の各式を無次元化すると次のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_2}{\partial \eta} &= -\bar{g} - N_x \frac{\partial X_7}{\partial \eta}, \frac{\partial X_3}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_5}{\partial \eta} = \mu X_2, \frac{\partial X_4}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_3}{\partial \eta} = \mu X_1, \frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \nu \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} = I X_4 \\ \nu \frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} &= I X_5, \frac{\partial X_7}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} = J X_3, \frac{\partial X_8}{\partial \eta} + X_7 = \kappa X_2, \frac{\partial X_8}{\partial \xi} + \mu X_6 = \mu \kappa X_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $(X_1, X_2) = (Q_y, Q_x) a^2 / D_0(1-\nu^2)$ 、 $(X_3, X_4, X_5) = (M_{xy}, M_y, M_x) a / D_0(1-\nu^2)$ 、 $(X_6, X_7) = (\theta_y, \theta_x)$ 、 $X_8 = w/a$ 、 $\xi = a\eta$ 、 $\eta = b\xi$ 、 a, b : 矩形板の縦横の辺長、 $\mu = b/a$ 、 $\bar{g} = \mu k \bar{g} / g_0$ 、 $k = g_0 a^3 / D_0(1-\nu^2)$ 、 $N_x = \mu l N_x / N_{x0}$ 、 $l = N_{x0} a^2 / D_0(1-\nu^2)$ 、 g_0 : 基準荷重強度、 N_{x0} : 基準面内圧縮力、 $I = \mu(1-\nu^2)(R_0/R)^3$ 、 $J = 2\mu(1+\nu)(R_0/R)^3$ 、 R_0 : 基準板厚、 $\kappa = E R_0^3 / 10 G a^2 R$ 、 $D_0 = E R_0^3 / 12(1-\nu^2)$: 基準板剛度

3. 基礎方程式の近似解

連立偏微分方程式(2)の各式を領域 $[\xi, \eta]$ において面積積分し、積分方程式に変換し、次に等間隔の数値積分法の応用により積分方程式を離散表示すると、任意の分接点における無次元化された各面内力および変形 X_{pij} は次式のように表わされる。

$$X_{pij} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{\xi=0}^{\xi_1} \beta_{ij} A_{pt} [X_{tj0} - X_{tj1}(1-\delta_{ij})] + \sum_{\eta=0}^{\eta_1} \beta_{ij} B_{pt} [X_{t0j} - X_{t1j}(1-\delta_{ij})] \right. \\ \left. + \sum_{\xi=0}^{\xi_1} \sum_{\eta=0}^{\eta_1} \beta_{ij} \beta_{ij} C_{ptij} X_{tj1j}(1-\delta_{ij}\delta_{jj}) \right\} - \sum_{\xi=0}^{\xi_1} \sum_{\eta=0}^{\eta_1} \beta_{ij} \beta_{ij} A_{pi} \bar{g}_{ij} \quad (3)$$

ここに、 $p = 1 \sim 8$ 、 β_{ij} : 等分間数値積分の重み係数(台形公式)、 δ_{ij} : Kronecker's delta

(3)式は、任意の分接点の断面力および変形 X_{pij} は辺上の点の諸量のみで表わされることを示しており次式のように書ける。

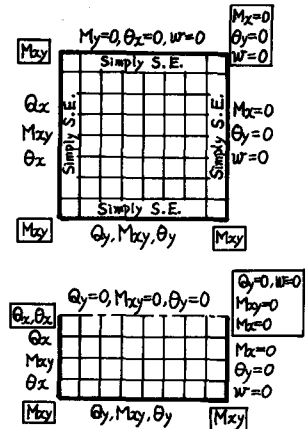


図1 積分定数と境界条件

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left(\sum_{f=0}^i a_{pijfd} X_{rf0} + \sum_{g=0}^j \bar{a}_{pijgd} X_{s0g} \right) + g_{pij} \quad (4)$$

ここに、 X_{rf0} 、 X_{s0g} :積分定数、 g_{pij} :荷重項、なお四辺単純支持の場合の積分定数および境界条件を図11示す。

4. 数値計算結果および考察

本解析法による、矩形板の座屈の数値解の収束性および精度を調べた。

本解析法において、横荷重一定のまま面内圧縮力 N_x を増加させるとき、たわみ w が $\pm\infty$ に発散するときを座屈条件とし、数値因子 k を用いて表わした。

図2は正方形板において分割数 m と座屈数値因子 k との関係を表わしたものである。同図より本解析法に基づく平板の座屈の数値解は、分割数 m の増加とともに一樣に収束していることがわかる。また図中の点線はチモシェンコの解析解であるが、それと本解析法の数値解とを比較すると、正方形板の場合、8分割程度の比較的小さい分割数で実用上十分な精度が得られていることがわかる。

図3は、 $\mu=b/a$ と座屈数値因子 k との関係を表わしたものである。図中で点線はチモシェンコの解析解である。同図より、本解析法による数値解はチモシェンコの解析解と良く一致していることがわかる。従って、本解析法は、正方形板のみならず、他の寸法の矩形板にも十分適用できる。なお、本解析法による数値解は、分割数8で計算した。

次に、本解析法を変厚板の座屈の問題に応用した。その際、図4に示すように板厚が一方向に直線的に変化する変厚板を用いた。その変厚板の座屈解析結果を等厚板の場合と併記して表1に示す。

なお、図2図3および表1は、本解析法において、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、座屈モードは1次として計算した結果である。

5. 結語

先に提示した変厚板の曲げ解法は、変厚板の座屈にも応用でき、その数値解の収束性および精度は良好である。また、本解析法は種々の境界条件に対しても応用できるが、今回は四辺単純支持板のみを取り扱った。

(参考文献)

- 1) 崎山毅・松田浩:変厚矩形板の曲げの一解析法,土木学会論文報告集,第338号,1983
- 2) 柳原二郎著:平板の曲げ理論
- 3) Timoshenko, Gere: Theory of Elastic Stability

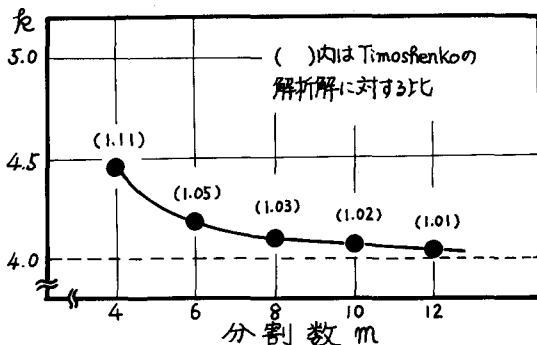


図2 分割数 m と k との関係

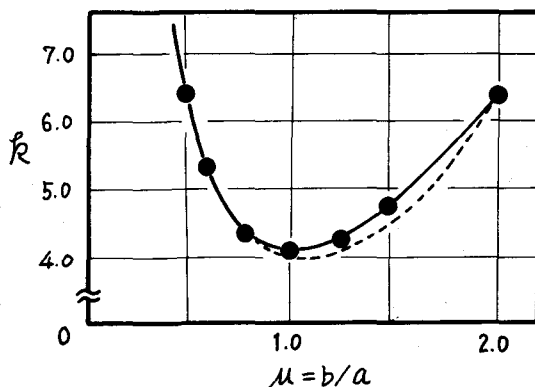


図3 μ と k との関係

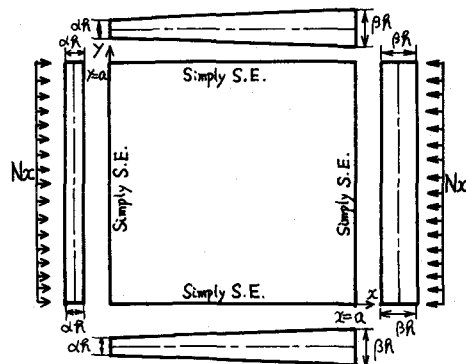


図4 変厚板

表1 変厚板の座屈解析結果

	$\alpha=0.9$ $\beta=1.1$	$\alpha=0.8$ $\beta=1.2$	$\alpha=1.0$ $\beta=1.0$	$\alpha=0.8$ $\beta=0.8$
座屈数値因子 k	4.02	3.78	4.11	2.10