

I-15

回転を考慮した増分形有限変形解析

熊本大学工学部

正 員 三 池 亮 次

正 員 小 林 一 郎

○ 学 生 員 久 木 田 祐 次

1. はじめに. さきに物体内部の任意点 x において物体力 f , 境界において表面力 P を受けて, 変形の中間位置 x' からの有限変位 Δu を生じてつり合い状態にあり, その内部の任意点の Kirchhoff 応力 T_k で, それに対応する一種のひずみテンソル増分 ΔE_k であるとき, 有限変位 Δu に対して外力のなす仮想仕事の積分 ΔW は T_k が ΔE_k に対してなす仮想仕事の物体内部の全領域にわたる積分に等しいことを示した. すなわち,

$$\begin{aligned} \Delta W &= \iint_A P \cdot \Delta u \, dA + \iiint_V f \cdot \Delta u \, dV = \iint_{A'} P^* \cdot \Delta u \, dA' + \iiint_{V'} f^* \cdot \Delta u \, dV' \\ &= \iiint_{V'} \text{trace} \left\{ T_k^T \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right\} dV' = \iiint_{V'} \text{trace} (T_k^T \Delta E_k) dV' = \Delta U \end{aligned} \quad (1)$$

ここに, 面積要素 dA と体積要素 dV は変形後におけるもので, dA' と dV' は中間状態における, 面積および体積要素である. また, ひずみテンソル ΔE_k は,

$$\Delta E_k = \Delta E_g + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \quad (2)$$

のように, Green ひずみテンソル増分 ΔE_g と, 回転を示す $(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'})^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'}$ との和と定義され, Green ひずみテンソル ΔE_g は,

$$\Delta E_g = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} + \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T + \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right\} \quad (3)$$

であり, Kirchhoff 応力テンソルは,

$$T_k^T = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta A_2}{\delta A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta A_3}{\delta A} \end{bmatrix} \Sigma^T \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{33}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

である. Σ は, いわゆる変形後の物理応力マトリックスで, g_{ii} は, 共変計量テンソル $G = (\frac{\partial x}{\partial x'})^T \frac{\partial x}{\partial x'}$ の対角要素である¹⁾

2. 有限変位仮想仕事の原理 2次元層状構造で, $\sigma_{22} = 0$ であり, また, せん断力 σ_{12} と σ_{21} の影響が無視できる場合に, 式(1)において,

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'_1} & \frac{\partial x}{\partial x'_2} & \frac{\partial x}{\partial x'_3} \end{bmatrix} = [e_1, e_2, e_3] \quad (5)$$

ここに, e_i は共変基底ベクトルで, 中間状態における埋込直交座標の任意点の座標線の変形後の方向余弦を l_i とすると, $l_i = e_i / g_{ii}$ であるから

$$\begin{aligned} \Delta U &= \iiint_{V'} \text{trace} \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} & l_1 \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_2} \\ l_2 \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} & l_2 \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_2} \end{bmatrix} \right\} dV' \\ &= \iiint_{V'} \sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A} l_1 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} dV' \end{aligned} \quad (6)$$

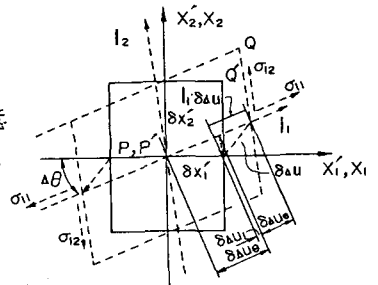


図1 物体内部の微小形状要素の有限変形

式(6)において, 必ずしもひずみは微小でなくともよい. また, 図-1の $l_1 \cdot \delta \Delta u$ は,

$$l_1 \cdot \delta \Delta u = \delta \Delta u_1 + \delta \Delta u_2 \quad (7)$$

すなわち、伸び δu_1 と回転に伴う見かけの伸び $\delta u_1 = \delta x_1(1 - \cos \theta_1)$ の和であることがわかるから、

$$\Delta U = \iiint_V \sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A_1} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (1 - \cos \theta) \right\} dV \quad (8)$$

上式の $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ は、縦ひずみを、 $(1 - \cos \theta)$ は見かけのひずみである。

中間状態と変形後における面積要素の $\delta A_1 \doteq \delta A_1$ であり、変形後の物理的直応力 σ_{11} が、平面保持の法則に従い、軸力 $N + \Delta N$ 、および、曲げモーメント $M + \Delta M$ で表わすと、

$$\sigma_{11} = \frac{N + \Delta N}{A} + \frac{M + \Delta M}{I} x \quad (9)$$

ここに、 x は中立軸からの距離であり、また、ひずみは、

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\Delta N}{EA} + \frac{\Delta M}{EI} x \quad (10)$$

で、これを式(8)に代入すると、ひずみエネルギー ΔU は、部材軸方向の線素 ds についての積分として次のように得られる。

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_L \left\{ \left[\frac{\Delta N}{EA} + (1 - \cos \theta) \right] (N + \Delta N) + \frac{\Delta M}{EI} (M + \Delta M) \right\} ds \\ &= \int_L \left\{ \left[\Delta e_m + (1 - \cos \theta) \right] (N + \Delta N) + \Delta \theta (M + \Delta M) \right\} ds \end{aligned} \quad (11)$$

3. 計算例 上記の理論を接続マトリックスを用いて定式化すると、式(11)において、 $P_m^T = [N, M]$ 、 $\Delta e_m^T = [\Delta e_m, \Delta \theta]$ 、 $\Delta e_\theta^T = [(1 - \cos \theta), 0]$ 、 $\Delta e_m = \Delta e_{m1} + \Delta e_\theta$ とおけば、

$$\Delta U = \int_L (P_m + \Delta P_m)^T \Delta e_m ds \quad (12)$$

である。接続マトリックス $(C + \Delta C)$ を用いる解法に従い、中間状態からの荷重が P より ΔP 増大したときの変位増分は、

$$\Delta d = K^{-1} \{ \Delta P - \Delta C P_m + (C + \Delta C) K_m \Delta e_\theta \}, \quad K = (C + \Delta C) K_m (C + \Delta C)^T \quad (13)$$

である。ここに、 P_m は断面力のベクトル、 K_m はひずみベクトル Δe_m と ΔP_m との間の剛性マトリックス、 Δe_m は、回転に伴う見かけのひずみベクトルである。

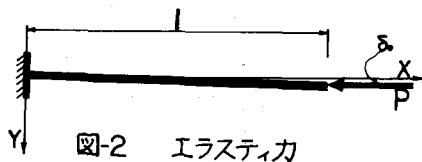


図-2 エラスティカ

式(13)に従い、図-2に示すエラスティカの解析を、下記の諸量によって部材を4等分、8等分に分割して行った。

$$EA = EI = 10^6$$

$$l = 200 \text{ cm}, \quad \delta_0 = l/1000$$

$$P_0 = 61.685 \text{ kg}$$

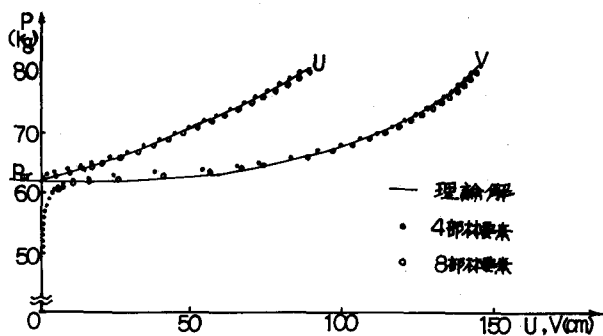


図-3 自由端の荷重-変位曲線(U:水平変位, V:鉛直変位)

図-3に、その解析結果と、チモシェンコの座屈理論による解を示す。

参考文献：1)三並亮次「有限変形における増分形エネルギー基礎理論」工学会論文報告集 300号、1984年5月。