

拡散水理模型における循環流のFEMによる解析

九州産業大学 正会員 加納正道、赤坂順三
九州産業大学 学生会員 西村顕治、切通義人
九州産業大学 古賀 毅、古井敏二

1・まえがき 従来、非定常解析の数値解析手法としては、差分法が多く用いられてきている。しかし、差分法では計算領域を正方形格子網でおおうために、境界条件の複雑な沿岸に対する潮汐流および物質の移流拡散を求めるには格子網を小さくしなければならないため計算機の記憶容量や計算時間などが増大してしまうという問題が生じている。そこで、本研究では、差分法の欠点をおぎなえるであろうGalerkin有限要素法の基礎的研究の第一歩として、拡散水理模型における循環流を解く目的で、二次元Reynolds方程式の非定常解析を一次三角要素により行なってみた。

2・基礎方程式 図-1のような座標系を用い、三次元のReynolds方程式を水底から水面まで鉛直方向に積分すると、二次元潮流の基礎方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (\zeta U)}{\partial x} + \frac{\partial (\zeta V)}{\partial y} = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial (\zeta - H)}{\partial x} + \frac{U g \sqrt{U^2 + V^2}}{C_f^2 \zeta} = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial (\zeta - H)}{\partial y} + \frac{V g \sqrt{U^2 + V^2}}{C_f^2 \zeta} = 0 \quad \cdots (3)$$

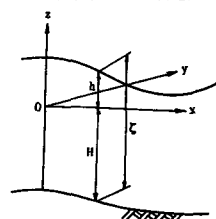


図-1 座 標 系

ここに、Hは平均海面 (x, y座標面) より水底面までの高さ、ζは自由水面より水底までの高さであり、h = ζ - H、UおよびVは水深方向の平均値でそれぞれ xおよび y方向の流速成分、gは重力加速度、C_fはChezy の粗度係数とする。

3・Galerkin 法による定式化 領域を有限個の要素に分割し、各要素内で次のような区分的に連続な近似関数を定義する。

$$\zeta_a = \sum \zeta_\beta N_\beta, H_a = \sum H_\beta N_\beta, U_a = \sum U_\beta N_\beta, V_a = \sum V_\beta N_\beta \quad \cdots (4)$$

ここに、 $\sum = \sum_{\beta=1}^N$ 、 $\beta = 1, 2, \dots, N$ 、Nは各要素ごとの総節点数、 $\zeta_\beta(t)$ 、 H_β 、 $U_\beta(t)$ 、 $V_\beta(t)$ は節点値、 $N_\beta(x, y)$ は形状関数とする。式(4)を潮流の基礎方程式(1)、(2)、(3)に代入し、その時に生じる残差に重み関数として、形状関数 N_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$)をかけ、Galerkinによる定式化を実行し整理すると、次式を得る¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sum \{ M_{\alpha\beta} \dot{\zeta}_\beta + K_{\alpha\beta}^x U_\beta \zeta_\gamma + K_{\alpha\beta}^y \zeta_\beta U_\gamma + K_{\alpha\beta}^x \zeta_\beta V_\gamma + K_{\alpha\beta}^y \zeta_\beta V_\gamma \} &= 0 \\ \sum \{ M_{\alpha\beta} \dot{U}_\beta + K_{\alpha\beta}^x U_\beta U_\gamma + K_{\alpha\beta}^y U_\beta V_\gamma + g N_{\alpha\beta}^x (\zeta_\beta - H_\beta) - f M_{\alpha\beta} V_\beta + F_e U_\beta \} &= 0 \\ \sum \{ M_{\alpha\beta} \dot{V}_\beta + K_{\alpha\beta}^x U_\gamma V_\beta + K_{\alpha\beta}^y V_\gamma V_\beta + g N_{\alpha\beta}^y (\zeta_\beta - H_\beta) + f M_{\alpha\beta} U_\beta + F_e V_\beta \} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} M_{\alpha\beta} &= \iint N_\alpha N_\beta dA_e, K_{\alpha\beta}^x = \iint N_\alpha N_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial x} dA_e, K_{\alpha\beta}^y = \iint N_\alpha N_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial y} dA_e, \\ N_{\alpha\beta}^x &= \iint N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x} dA_e, N_{\alpha\beta}^y = \iint N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial y} dA_e, F_e = \iint N_\alpha N_\beta \frac{g \sqrt{(U_\gamma N_\gamma)^2 + (V_\gamma N_\gamma)^2}}{C_f^2 \zeta_\gamma N_\gamma} dA_e \end{aligned}$$

なお、 $N_\alpha N_\beta = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N N_\alpha N_\beta$ などのように総和規約を適用し、 $M_{\alpha\beta} = \iint N_\alpha N_\beta dA_e$ などの積分には、面積座標による積分公式を利用した。

4・時間積分法 時間に関する離散化に対しては、差分法による Leap-frog 法を用いた。

$$Cq^{k+1} = Cq^{k-1} - 2\Delta t F^k q^k \quad \cdots (6)$$

ここに、Cは時間に無関係の場所による係数、 q^{k+1} は未来の節点値、 q^{k-1} は過去の節点値、 q^k は現在の節点値、 F^k は現在の場所による係数、 Δt は時間きざみである。

また、式 (6) の節点値 q の時間のとり方を変えた方法、式 (7), (8) も行なってみた。

$$\left. \begin{aligned} Cq_3^{k+1} &= Cq_1^{k-1} - 2\Delta t F_1^{k-1} F_2^k q_1^{k-1} q_2^k \\ q_4^k &= (q_3^{k+1} + q_1^{k-1}) / 2, F_4^k \leftarrow q_4^k \\ Cq_5^{k+1} &= Cq_1^{k-1} - 2\Delta t F_4^k F_2^k q_4^k q_2^k \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} Cq_3^k &= (q_1^{k-1/2} + q_2^{k+1/2}) / 2, F_3^k \leftarrow q_3^k \\ Cq_5^{k+1} &= Cq_5^{k-1} - 2\Delta t F_3^k F_2^k q_3^k q_4^k \end{aligned} \right\} (8)$$

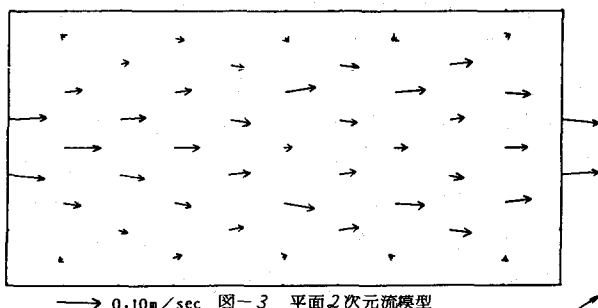
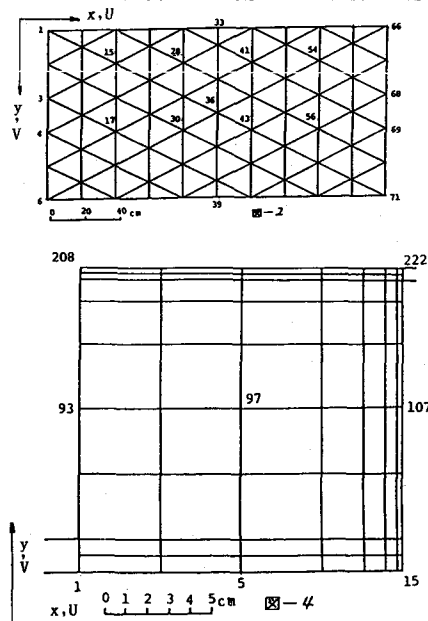
5・水理模型への応用 (i) 三角形要素による非定常解析 図-2のように拡散水理模型領域を三角形要素に分割した。境界は、拡散水理模型の側面の節点を固定境界とし、境界上の節点におけるU、V方向の流速成分を零とした。水流の出入口の節点番号3, 4, 6, 8, 6, 9を自由境界とし流出入条件として流速成分を2分間で0.0m/secから一定値にした。

(ii) 四角形要素による定常解析 図-4のように拡散水理模型領域を四角形要素に分割した。解析方法は、文献4) による方法で行ない、固定境界の側面と底面は、U、V方向の流速成分を零とし、水面はV方向のみ零とした。自由境界は、図-4の左下を流入口とし、右上を流出口とした。初期条件としては、実測値を30数点与えた。

6・計算結果 三角要素非定常解析については、計算開始2分後まで安定解が得られ、計算結果は図-3に示す。ここに、計算条件は、 $\Delta t = 0.1$ / sec, $f = 0.0$, $C_f = 17.0 \text{ m}^{1/2} / \text{sec}$, $H = 9.8 \text{ cm}$ である。四角形要素については、計算結果を図-5に示す。これは、 ν (動粘性係数) を0.0より等価動粘性係数の考え方で、逐次大きくして行なった試算における $\nu = 1.0$ の場合の結果である。同図で見られるように循環流が見られ、定性的には実測値とほぼ一致する計算値が得られた。

7・むすび

我々の三角形要素による解析は、 $Re \div 10^4$ の乱流状態におけるものであり、また、四角形要素による解析は、 $Re \div 3 \times 10^3$ の遷移状態におけるものである。今後、両方の計算結果を踏まえて乱流状態あるいは遷移状態の水流の数値解析を精度よくおこなうべく検討をかさねていきたい。



参考文献

- 1) 松梨順三郎ら：FEMによる大阪湾・播磨灘の開流解析、(財)建設工学研究所報告、第21号、昭和54年11月
- 2) Larry J.S. 著、川井忠彦監訳：応用有限要素解析、丸善、1978
- 3) 戸川肇人：FORTRANによる有限要素法入門、サイエンス社
- 4) C. Taylor, T. G. Hughes: Finite Element Programming of The Navier-Stokes Equations, Pineridge Press

