

水平円管内流れにおける沈降性粒子の移流分散係数について

九州大学工学部 正員 粟谷陽一
九州工業大学 正員 ○藤崎一裕

1. まえがき

円管内流れにおける物質の移流分散については、中立性物質に関する検討がよく知られているが、粒子の沈降性を考慮した解析はまだあまりなされていないようである。そこで本報では水平におかれた円管内流れにおける沈降性粒子の平均流速や分散係数について調べた。解析の手法としては、まず流下方向に濃度勾配のない場合の解を基本解とし、この基本解に濃度勾配の影響を線形の補正項として加えるという従来からの方法によった。また、管路底部には粒子の沈積がない場合を対象とし、基礎式の積分には有限要素法を用いた。

2. 基礎式

図1のように流下方向にX軸、管の横断面内の水平方向にZ軸、鉛直方向にY軸ととり、管半径 a 、粒子濃度 C 、沈降速度 w 、X方向流速 u 、拡散係数 D とすると、この場合の粒子保存の式と境界条件は、それぞれ(1)、(2)式で示される

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}C) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{D} \frac{\partial C}{\partial y} + W \bar{C} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{D} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\bar{D} \frac{\partial C}{\partial n} + l_y W \bar{C} = 0; \bar{r} = (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^{1/2} = 1 \quad (2)$$

$$\bar{x} = x/a, \bar{y} = y/a, \bar{u} = u/u_*, \bar{D} = D/(au_*) \quad (3)$$

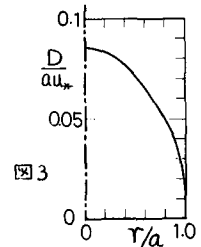
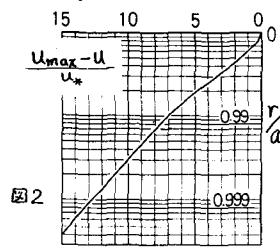
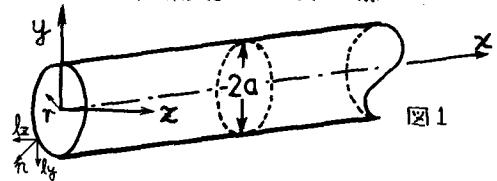
$$\bar{t} = t/(a/u_*), W = w/u_* \quad (4)$$

l_z, l_y は円管壁境界における外向単位法線方向余弦である。上式において、拡散係数には等方性を仮定し、粒子の拡散係数と滑動拡散係数とを等しいとした u および D の値は、Taylor が中立性物質の解析に使用した値を利用する。(図2、図3)

濃度 C に関しては、X方向の変化が小さい場合を想定して、移動座標 x_1 で展開して1次の項までとり次式で表す

$$C = \bar{C}(1 + Kx_1) + K\hat{C} \quad (5)$$

K はX方向濃度勾配に関連した一定値とし、 $\bar{C}$ および $\hat{C}$ は、(2)式を満足し、かつそれぞれ(6)、(7)式の解とする



$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + W \bar{C} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{D} \frac{\partial \hat{C}}{\partial y} + W \hat{C} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{D} \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} \right) = \hat{u}_s \bar{C} \quad (7)$$

$$\hat{u}_s = u - \bar{u}_s \quad (8)$$

$$\bar{u}_s = \iint \bar{C} \bar{u} d\bar{y} d\bar{z} / \iint \bar{C} d\bar{y} d\bar{z} \quad (9)$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x} - \bar{u}_s \bar{t} \quad (10)$$

とし、(5) ~ (9) 式を考慮して、(1) 式を管断面で積分すると次式がえられる

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_s \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \bar{x}} = \bar{D}_L \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial \bar{x}^2} \quad \text{or} \quad \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \bar{t}} = \bar{D}_L \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial \bar{x}^2} \quad (11)$$

$$-\bar{D} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \bar{x}} = -\frac{D_L}{au_*} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \bar{x}} = \langle \hat{u}_s \hat{C} \rangle \quad (12)$$

$\langle \rangle$ は管全断面にわたる積分を意味する。(9)、(12) 式から、粒子の平均移流速度 $\bar{u}_s$ および分散係数 $\bar{D}_L$ を求めた。

なお、(2) 式を満足する(6)、(7) 式の数値計算には、Galerkin の有限要素法を用いた。各変量を近似関数 ϕ, ψ を用いて次式のように近似する

$$\bar{C} = \phi_p \bar{C}_p, \hat{C} = \phi_p \hat{C}_p, \hat{u}_s = \phi_p \hat{u}_s, \bar{D} = \psi_p \bar{D}_p \quad (13)$$

上式を(6) 式に代入して、これを離散化すると

$$\sum_p \left[\bar{C}_p \left\{ \iint \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial y} \psi_p \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + \phi_p W \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + \frac{\partial \phi_p}{\partial z} \psi_p \frac{\partial \phi_p}{\partial z} \right) d\bar{y} d\bar{z} \right\} \right]$$

$$- \iint \phi_p \psi_p \bar{D}_p \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + \phi_p W \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + \phi_p \psi_p \bar{D}_p \frac{\partial \phi_p}{\partial z} l_z ds = 0 \quad (14)$$

Γは管壁と、 $z=0$ の対称面とからなり、解析領域の全周である。

$\hat{C}$ の場合も同様にして

$$\begin{aligned} & \sum_e \left\{ \bar{C}_e \left(\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y} \psi_1 \bar{D}_e + \phi_e W \frac{\partial \phi_e}{\partial y} + \frac{\partial \phi_e}{\partial z} \psi_1 \bar{D}_e \frac{\partial \phi_e}{\partial z} \right) d\bar{y} d\bar{z} \right) \right. \\ & \left. - \left\{ \phi_e \left(\psi_1 \frac{\partial \phi_e}{\partial y} + \phi_e W \right) l_y ds + \int_r \phi_e \psi_1 \bar{D}_e \frac{\partial \phi_e}{\partial z} l_z ds \right\} \right\} \\ & = K \hat{u}_e \bar{C}_e \left(\int \phi_e \psi_1 \phi_e d\bar{y} d\bar{z} \right) \quad (15) \end{aligned}$$

かえられる。要素の形状は三角形とし、近似関数として中には、6節点2次、 ψ_1 には3節点1次関数を用いた。要素内数値積分は、面積を標準系に変換して行なった。

3. 計算結果と考察

図4、図5にそれぞれ $\bar{C}$ および $\hat{C}$ の計算結果の例を示す。また、図6は粒子の移動速度 $\bar{V}_s$

$$\bar{V}_s = \frac{1}{\bar{C}} \left(-\bar{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} - W \bar{C} + -\bar{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) \quad (16)$$

の要素の中心部分における値を示す。図6から、管内での粒子の2次流的な挙動を知ることができる。また図4～図6でいづれも、 $W=0.1$ の方が相対的に沈降の影響が強いので、管内底部側の粒子濃度が高く、 $\bar{V}_s$ の値も大きい。

図7および図8に、 W と U_s との関係、 W と $\bar{D}_e$ との関係を示す。図中の破線は開水路流の場合の値を示す。また、図8中の縦軸の分母 D_{e0} は、中立性物質の分散係数で、管路の場合10.064(南水路の場合5.864)であるが、本報では、ここで用いたプログラムで $W \rightarrow 0$ としたときの値8.504を用いた。この数値誤差の原因については検討中である。なお、計算はいづれも要素数120、全節点数269で行なった。

この研究を進めるにあたり種々協力いただいた、九州工大開発土木工学科の小幡茂喜技術補佐員と同4年次生の大浦芳弘君に感謝する。

参考文献

- 1) Taylor, G. I., J. Fluid Mech., vol. 223, pp.466-488 (1956)
- 2) Sumer, B. M., J. Fluid Mech, vol. 65, Part 1 (1974) pp. 11~28
- 3) Elder, J. W., J. Fluid Mech., Vol. 5, (1959) pp. 544~560

