有限振幅波の一理論解

熊本大学　工学部　正　田渕幹修・熊本大学　工学部　正　滝川清
島根県庁　黒田耕一・奥村組(株)　福島智弘
熊本大学　工学部　学　○土居陽介

1．まえがき

著者らは，先に，有限振幅波の理論解析手法の一つとして，モード結合方程式を導いた。（第28回海岸工学講演会論文集－浅海波浪の非線形干渉について－P94～P98）これは，波形が，変形していくような非定常波に対して有効な解析手法を与えるものであるが，ここでは，その有用性を示す意味で，これを用いた定形波動解を示すものである。尚，一部，先の論文中に誤りが，あったので，これを訂正したものを記す。

2．モード結合方程式

$$(-\sigma_n^2+g k_n T_n)\phi_n=\sum_{ij} Q_{ijn}^{(1)}\phi_i\phi_j\{-\overline{\cos(\theta_i+\theta_j+\theta_n)}+\overline{\cos(\theta_i+\theta_j-\theta_n)}-\overline{\cos(\theta_i-\theta_j+\theta_n)}+\overline{\cos(\theta_i-\theta_j-\theta_n)}\}$$
$$+\sum_{ijl}(Q_{ijln}^{(2)}-Q_{ijln}^{(3)})\phi_i\phi_j\phi_l\{-\overline{\cos(\theta_i+\theta_j+\theta_l+\theta_n)}+\overline{\cos(\theta_i+\theta_j+\theta_l-\theta_n)}+\overline{\cos(\theta_i+\theta_j-\theta_l+\theta_n)}$$
$$-\overline{\cos(\theta_i+\theta_j-\theta_l-\theta_n)}\}$$
$$+\sum_{ijl}(Q_{ijln}^{(2)}+Q_{ijln}^{(3)})\phi_i\phi_j\phi_l\{-\overline{\cos(\theta_i-\theta_j+\theta_l+\theta_n)}+\overline{\cos(\theta_i-\theta_j+\theta_l-\theta_n)}+\overline{\cos(\theta_i-\theta_j-\theta_l+\theta_n)}$$
$$-\overline{\cos(\theta_i-\theta_j-\theta_l-\theta_n)}\}\ \text{-----------}\ (1)$$

ここに，$Q_{ijn}^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{P_{ij}^{(1)}}{\alpha_n}$　$Q_{ijln}^{(2)}=\frac{1}{4}\frac{P_{ijl}^{(2)}}{\alpha_n}$　$Q_{ijln}^{(3)}=\frac{1}{4}\frac{P_{ijl}^{(3)}}{\alpha_n}$

又，$P_{ij}^{(1)}=\alpha_i\alpha_j\{2k_ik_j\sigma_i'+\sigma_j'k_i(k_i-k_jT_iT_j)-\frac{1}{g}\sigma_i'^2\sigma_j'k_iT_i\}$

$$P_{ijl}^{(2)}=\alpha_i\alpha_j\alpha_l\{\tfrac{3}{2}k_ik_jk_l^2-k_ik_j^2k_lT_jT_l-\tfrac{1}{2g}\sigma_i'^2k_ik_jk_lT_l+\tfrac{1}{2g}\sigma_i'\sigma_j'\{-k_l^3T_l+2k_jk_l(k_jT_l+k_lT_j)-2k_l^2k_iT_i\}$$
$$-\tfrac{2}{g}\sigma_i'\sigma_l'k_lk_j(k_jT_j+k_lT_l)+\tfrac{1}{2g^2}\sigma_i'\sigma_j'\sigma_l'^2k_l(k_l+2k_iT_iT_l)\}$$
$$P_{ijl}^{(3)}=\alpha_i\alpha_j\alpha_l(\tfrac{1}{2}k_i^2k_jk_lT_jT_l-\tfrac{1}{2g}k_ik_jk_lT_iT_jT_l\sigma_i'^2)$$

ここに，$T_i=\tanh(k_ih')$
$h'=h+\gamma$

3．定形進行波について

位相角を $\theta_n=k_nx-\sigma_nt$ と置き，基本波として，$\theta_1=kx-\sigma t$，共鳴条件を満たす波として，3次までとると，$\theta_2(=2\theta_1)$，$\theta_3(=3\theta_1)$の2つの位相をもつ波を考える。各波の速度ポテンシャルは，(1)より次の様になる。

$$\phi_1=\frac{g}{\sigma\alpha_1}a$$
$$\phi_2=\frac{g}{\sigma\alpha_2}ka^2\frac{(3-2T^2)(1+T^2)}{8T^3}$$
$$\phi_3=\frac{g}{\sigma\alpha_3}k^2a^3\frac{27+42T^2-98T^4+56T^6-3T^8}{192T^6}$$

分散関係式は

$$\sigma^2=gk\{T+\frac{(ka)^2}{8T^3}(9-15T^2+13T^4-T^6)\}\ \text{-------}\ (2)$$

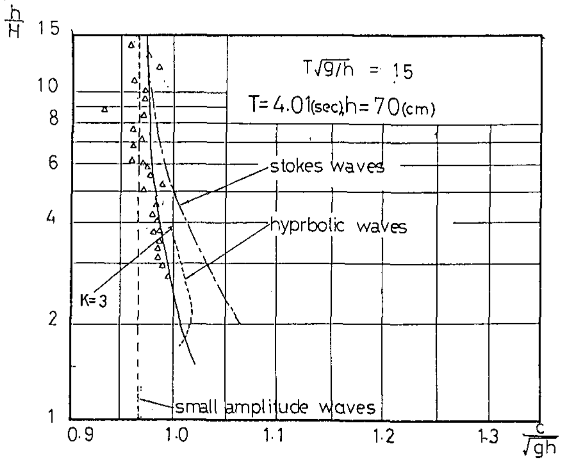
又，全体の速度ポテンシャルは，

$$\Phi=\phi_1\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin\theta_1+\phi_2\frac{\cosh 2k(h+z)}{\cosh 2kh}\sin\theta_2+\phi_3\frac{\cosh 3k(h+z)}{\cosh 3kh}\sin\theta_3$$

又，波速については，(2)より

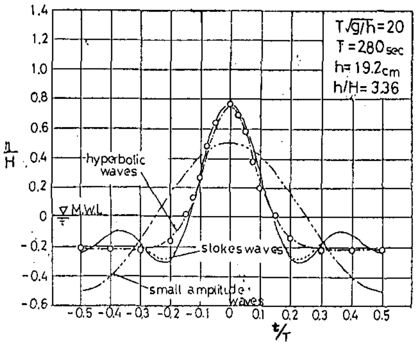
$$C^2/gh=1/kh\{T+\frac{(ka)^2}{8T^3}(9-15T^2+13T^4-T^6)\}\ \text{------}\ (3)$$

右図は，波高変化にともなう波速について，(3)より得た理論値と実験値を比較した図である。求めた理論曲線とストークスの理論曲線，並びに実験値ともよく一致していることがわかる。



〈波速の理論値と実験値との比較〉

又、波形，浅水係数に関しても、理論曲線は、ストークス波と、きわめてよく一致した結果が、でている。
右図は、波形の比較の図である。



〈波形の比較〉

岩垣雄一・植木亨
海岸工学（共立出版）

4. 定形重複波について

先に、3において、定形進行波の基本波として、$\theta_1 = kx - \sigma t$ を考えた。
ここでは、定形反射波の基本波を $\theta_1' = kx + \sigma t$ とし、共鳴条件を満す波として、$\theta_2'(=2\theta_1')$・$\theta_3'(=3\theta_1')$ の2つの位相をもつ波を考え、θ_1・θ_2・θ_3 並びに、θ_1'・θ_2'・θ_3' の干渉により発生する波として θ_4 から θ_9 までの位相をもつ6つの波（重複波）をとった。

ここでは、計算過程の一例として、分散関係式 並びに ϕ_7 について記す。
(1)より 分散関係式 並びに ϕ_7 を求めるモード結合方程式は、それぞれ

$$(\sigma^2 - gkT) = -\{(Q^{(1)}_{2,1,1} - Q^{(1)}_{1,2,1})\phi_1\phi_2 + (Q^{(1)}_{5,1,1} + Q^{(1)}_{1,5,1})\phi_1\phi_5 + (Q^{(1)}_{4,1,1} - Q^{(1)}_{1,4,1})\phi_1\phi_4\}$$
$$-(Q^{(2)}_{1,1,1,1} + 3Q^{(3)}_{1,1,1,1})\phi_1^3 - 2\{(Q^{(2)}_{1,1,1,1} + Q^{(3)}_{1,1,1,1}) + Q^{(3)}_{1,1,1,1} + Q^{(3)}_{1,1,1,1}\}\phi_1\phi_1'^2$$

$$(\sigma_7^2 - gk_7T_7)\phi_7 = -(Q^{(1)}_{2,1,7} - Q^{(1)}_{1,2,7})\phi_1\phi_2 - (Q^{(1)}_{5,1,7} + Q^{(1)}_{1,5,7})\phi_1\phi_5 + \{(Q^{(2)}_{1,1,1,7} - Q^{(3)}_{1,1,1,7}) - (Q^{(2)}_{1,1,1,7} + Q^{(3)}_{1,1,1,7})$$
$$-(Q^{(2)}_{1,1,1,7} + Q^{(3)}_{1,1,1,7})\}\phi_1^2\phi_1'$$

ϕ_1・ϕ_2 は、3より。又、ϕ_5 は、ϕ_1・ϕ_1' で表現できる。
それぞれに、ϕ_1・ϕ_1'・ϕ_2・ϕ_5 並びに(1)よりQを計算し、代入すれば、分散関係式、並びに ϕ_7 が算出できる。
下記は、それぞれの位相角に対する速度ポテンシャルである。

位相角	速度ポテンシャル
$\theta_4 = \theta_1 + \theta_1' = 2kx$	$\phi_4 = 0$
$\theta_5 = \theta_1 - \theta_1' = -2\sigma t$	$\phi_5 = \frac{g}{\sigma\alpha_5} k a^2 \frac{1+2T^2}{4T}$
$\theta_6 = \theta_2 + \theta_1' = 3kx - \sigma t$	$\phi_6 = \frac{g}{\sigma\alpha_6} k^2 a^3 \frac{3T^8+73T^6-69T^4-40T^2-3}{64T^4}$
$\theta_7 = \theta_2 - \theta_1' = kx - 3\sigma t$	$\phi_7 = \frac{g}{\sigma\alpha_7} k^2 a^3 \frac{3T^6-T^4+47T^2+9}{64T^4}$
$\theta_8 = \theta_1 + \theta_2' = 3kx + \sigma t$	$\phi_8 = \frac{g}{\sigma\alpha_8} k^2 a^3 \frac{3+34T^2+58T^4-52T^6-3T^8}{64T^4}$
$\theta_9 = \theta_1 - \theta_2' = -kx - 3\sigma t$	$\phi_9 = \frac{g}{\sigma\alpha_9} k^2 a^3 \frac{9+46T^2-44T^4-9T^6}{64T^4}$
$\theta_{10} = 2\theta_1' = 2(kx + \sigma t)$	$\phi_{10} = \frac{g}{\sigma\alpha_{10}} k a^2 \frac{(3-2T^2)(1+T^2)}{8T^3}$
$\theta_{11} = 3\theta_1' = 3(kx + \sigma t)$	$\phi_{11} = \frac{g}{\sigma\alpha_{11}} k^2 a^3 \frac{27+42T^2-98T^4+56T^6-3T^8}{192T^6}$
$\theta_{12} = \theta_1' = kx + \sigma t$	$\phi_{12} = \frac{g}{\sigma\alpha_{12}}$

（θ_{10}，θ_{11}・θ_{12} については、反射波のみの位相）

又、分散関係式は、 $\sigma^2 = gk\{T + \frac{(ka)^2}{8T^3}(9 - 19T^2 - 5T^4 - T^6)\}$

全体の速度ポテンシャルは

$$\Phi = (\phi_1\sin\theta_1 + \phi_7\sin\theta_7 + \phi_9\sin\theta_9 + \phi_{12}\sin\theta_{12})\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} + (\phi_2\sin\theta_2 + \phi_{10}\sin\theta_{10})\frac{\cosh 2k(h+z)}{\cosh 2kh}$$
$$+ (\phi_3\sin\theta_3 + \phi_6\sin\theta_6 + \phi_8\sin\theta_8 + \phi_{11}\sin\theta_{11})\frac{\cosh 3k(h+z)}{\cosh 3kh} + \phi_5\sin\theta_5$$

5. あとがき

定形重複波の特性については、講演時に、発表する。