不規則分布荷重を受けるはりの解析（いくつかの境界条件について）

○　長崎大学工学部　学生員　浦川　剛志
長崎大学工学部　正　員　岡林　隆敏

1．はじめに

信頼性理論を適用する設計の観点から、近年、不確定要因を考慮した構造解析に関する研究が進められている。地震・風・波浪による構造物の動的解析に対して、荷重を確率過程でモデル化する不規則振動論による手法が確立している。他方、静的な問題においても、不確定な変量に対する応答の変動を解析する問題がある。例えば、不規則に空間的に分布する荷重を受ける構造物の各種の応答の変動量の解析、さらに各種の初期不整を有する構造物の座屈荷重の変動解析等がある。しかし、動的な解析は初期値問題となるのに対して静的な解析は境界値問題に分類される。このために不規則分布荷重を受ける構造物の解析においても、複雑な構造物に適用できる効果的な解析手法は確立されていない。また、応答解析は、専ら解析手法に依っており、この点が複雑な構造物を解析できない障害になっているものと考えられる。

本報告では、不規則初期値問題の一解法として、これを初期値問題に変換して解く手法を提案する。数値解析例として、固定－移動支承ばりおよび固定－固定ばりの解析を行い、単純な問題では解析解が得られるので、それぞれの解析解を示した。

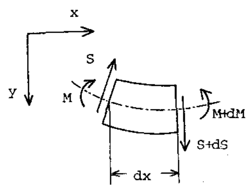

図-1　はり要素

2．はりの基礎方程式

はりの基礎方程式を伝達マトリックス法で表現する。図1に示したように、一様ばりに分布荷重$g(x)$が作用する場合，x点のたわみ$w(x)$，たわみ角$\phi(x)$，曲げモーメント$M(x)$および$Q(x)$は、次式で与えられる。

$$dw/dx=\phi,\quad d\phi/dx=-M/EI,\quad dM/dx=Q,\quad dQ/dx=-g(x)\quad ------(1)$$

ここで状態変数 $\mathbb{X}(x)^T=[\,w\ \ \phi\ \ M\ \ Q\,]$ を導入し、外力ベクトルを $\mathbb{F}(x)^T=[\,0\ \ 0\ \ 0\ \ -g(x)\,]$ で定義すると，(1)式は、次のようにベクトル表示される。

$$\frac{d}{dx}\mathbb{X}(x)=\mathbb{A}\mathbb{X}(x)+\mathbb{F}(x)\text{，境界条件 }\mathbb{X}(0)=\mathbb{X}_0\text{，}\mathbb{X}(l)=\mathbb{X}_l\cdots(2)$$

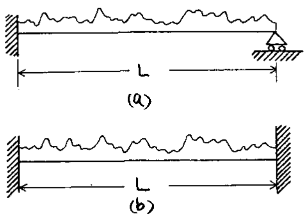

図-2　固定－可動支承，固定－固定ばり

左端、右端の境界条件を、$\mathbb{X}_0$および$\mathbb{X}_l$でベクトル表示した場合、左端支点の回転，固定および自由端に対して、それぞれ $[\,\phi_0\ \ Q_0\,]$ $[\,M_0\ \ Q_0\,]$ $[\,w_0\ \ \phi_0\,]$ の自由度がある。これらを初期ベクトル$\tilde{\mathbb{X}}_0$で定義すると、境界マトリックス$\mathbb{B}^{(1)}$を用いて　$\mathbb{X}_0=\mathbb{B}\tilde{\mathbb{X}}_0$　------ (3)

で表される。他方、右端では、移動、固定，自由端に対して、それぞれ $[\,w_l\ \ M_l\,]$，$[\,w_l\ \ \phi_l\,]$，$[\,M_l\ \ Q_l\,]$ は$\mathbb{O}$となる。これらを終端ベクトル$\tilde{\mathbb{X}}_l$と定義すると、右端の境界マトリックス$\mathbb{B}'^{(1)}$を用いて、右端境界条件は　$\mathbb{B}'\mathbb{X}_l=\tilde{\mathbb{X}}_l=\mathbb{O}$　------ (4)　となる。

3．不規則応答解析

不規則分布荷重$g(x)$を白色雑音過程でモデル化すると、外力ベクトル$\mathbb{F}(x)$の確率特性は(5)式で表される。応答は、一般性を失うことなく、平均値応答と平均値回りの応答に分離することができる。以後、平均値回りの応答解析について説明する。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & E[\mathbb{F}(x)]=\mathbb{O}\\ \text{(ii)} & E[\mathbb{F}(x_1)\mathbb{F}(x_2)^T]=\mathbb{Q}(x_1)\delta(x_1-x_2)\end{array}\right\}\ ------(5)$$

$$\mathbb{X}(x)=\Phi(x,0)\mathbb{X}_0+\int_0^x\Phi(x,\sigma)\mathbb{F}(\sigma)\,d\sigma\quad ------(6)$$

(2)式の解は、(6)式で与えられる。なお、式中の$\Phi(x,\sigma)$は、(7)式で与えられる状態遷移行列（格間伝達マトリックス）である。

$$d\Phi(x,\sigma)/dx=\mathbb{A}\Phi(x,\sigma)\text{，}\Phi(\sigma,\sigma)=\mathbb{I}\quad ------(7)$$

応答$\mathbb{X}(x)$の共分散は，$\mathbb{R}(x)=E[\mathbb{X}(x)\mathbb{X}(x)^T]$で定義される。(6)式と(5)式より，共分散$\mathbb{R}(x)$は，次式で与えられる。

$$\mathbb{R}_X(x)=\Phi(x,0)\mathbb{R}_0\Phi(x,0)^T+\Phi(x,0)\int_0^x E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(\sigma)^T]\Phi(x,\sigma)\,d\sigma$$

$$+\int_0^x\Phi(x,\sigma)E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(\sigma)^T]\,d\sigma\,\Phi(x,0)+\int_0^x\Phi(x,\sigma)\mathbb{Q}(\sigma)\Phi(x,\sigma)^T d\sigma \quad \text{------}(8)$$

(8)式を微分して，共分散$\mathbb{R}(x)$を支配する共分散方程式を得る。

$$\dot{\mathbb{R}}_X(x)=\mathbb{A}\,\mathbb{R}_X(x)+\mathbb{R}_X(x)\mathbb{A}+\Phi(x,0)E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(x)^T]+E[\mathbb{F}(x)\mathbb{X}_0^T]\Phi(x,0)^T+\mathbb{Q}(x) \quad \text{------}(9)$$

境界条件　：$\mathbb{R}_X(0)=\mathbb{R}_0$　，$\mathbb{R}_X(l)=\mathbb{R}_l$

(i)　荷重と初期条件の相関関数：$E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(x)^T]$

$x=l$とした(6)式の両辺に$\mathbb{F}(x)$を掛け，両辺に平均の操作を施す。白色雑音過程の性質を用いると，次式を得る。

$$E[\mathbb{X}_l\mathbb{F}(x)^T]=\Phi(l,0)E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(x)^T]+\Phi(l,x)\mathbb{Q}(x) \quad \text{-----}(10)$$

両辺に右端の境界マトリックスを掛ければ，右端境界条件より，次式が得られる。

$$\mathbb{B}'\Phi(l,0)\mathbb{B}\,E[\tilde{\mathbb{X}}_0\mathbb{F}(x)^T]+\mathbb{B}'\Phi(l,x)\mathbb{Q}(x)=\mathbb{O} \quad \text{------}(11)$$

これより$E[\tilde{\mathbb{X}}_0\mathbb{F}(x)^T]$を得る。また$E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(x)^T]=E[\mathbb{F}(x)\mathbb{X}_0^T]^T$の関係がある。

(ii)　初期条件の共分散：$\mathbb{R}_0$　　(8)式の右辺の第2項以後の式は，外力による応答を表している。これは，(9)式においては初期条件$\mathbb{O}$の解として得ることができる。これを荷重項と称して$\mathbb{P}(l)$と置く。(12)式の両辺に$\mathbb{B}'$と$\mathbb{B}'^T$

$$\mathbb{R}_X(l)=\Phi(l,0)\mathbb{R}_0\Phi(l,0)^T+\mathbb{P}(l) \quad \text{------}(12)$$

を掛けると，$\mathbb{B}'\mathbb{R}_X(l)\mathbb{B}'^T=\mathbb{O}$の関係より，次式を得る。

$$\mathbb{B}'\Phi(l,0)\mathbb{B}\tilde{\mathbb{R}}_0\mathbb{B}^T\Phi(l,0)^T\mathbb{B}'^T+\mathbb{B}'\mathbb{P}(l)\mathbb{B}'^T=\mathbb{O} \quad \text{------}(13)$$

(13)式より$\tilde{\mathbb{R}}_0$が得られる。ここに$\tilde{\mathbb{R}}_0$はそれぞれの境界条件に対する，左辺の$\mathbb{O}$でない境界条件の共分散を表している。

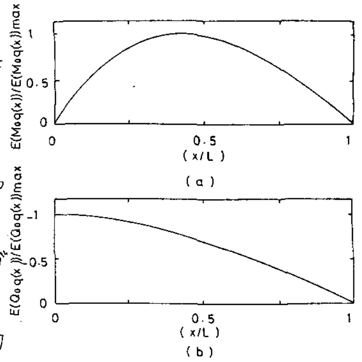

図-3 荷重と境界条件の相関関数

4．数値解析例　　著者等は，単純ばりおよび片持ばりの解析解を報告[2]した。ここでは，一端固定・他端移動支承ばりおよび両端固定ばりの解を求めた。これらの解は解析的に得ることができたが，解析を全て数値解析で実行することも可能である。ここでは，一端固定・他移動支承ばりの例を示す。ここで，不規則分布荷重$q(x)$のパワースペクトル密度をSとする。

◦初期条件と荷重の相関関数

$E[M_0 q(x)]=Sl\xi(1-\xi^2+3\xi+2)/2$　，$E[Q_0 q(x)]=S(1-3\xi^2+2\xi^3)$

ここに，$\xi=x/l$である。

◦初期条件の共分散　：$E[M_0^2]=2Sl^3/105$　，$E[M_0Q_0]=-3l^2/35$

$E[Q_0^2]=17Sl/35$

◦たわみ，たわみ角，曲げモーメントおよびせん断力の分散応答

$E[W(x)^2]=Sl^7\xi^4(24-72\xi+68\xi^2-8\xi^3-21\xi^4+10\xi^5+\xi^6)/5040E^2I^2$

$E[\phi(x)^2]=Sl^5\xi^2(32-144\xi+204\xi^2+56\xi^3-84\xi^4+56\xi^5+7\xi^6)/1680E^2I^2$

$E[M(x)^2]=Sl^3(8-72\xi+204\xi^2-140\xi^3+105\xi^4+26\xi^5-2\xi^6)/420$

$E[Q(x)^2]=Sl(68-140\xi+140\xi^3-35\xi^4)$

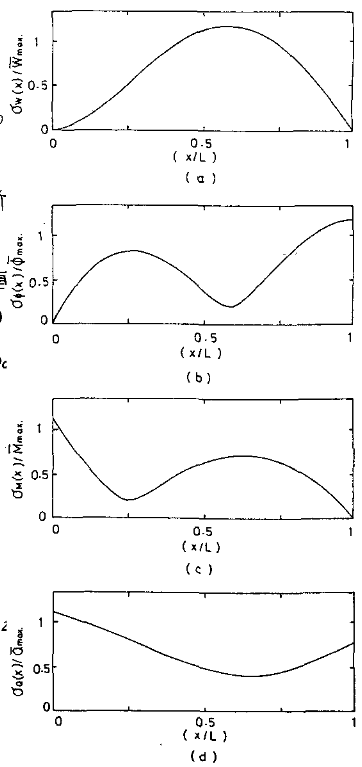

図-4 応答の標準偏差の変化

図-3は，最大値で規格化した初期条件と荷重の相関関数，図-4は，等分布荷重によるそれぞれの値で規格化した，それぞれの標準偏差を表している。

［参考文献］(1)伝達マトリックス法　成岡他著，(2)　岡林，土木学会論文第316号，1981年2月