土木学会西部支部研究発表会（1983.2）

不規則初期値問題と不規則境界値問題について

長崎大学工学部　正員　岡林　隆敏

1、はじめに

微分方程式のパラメータの中に確率変数を含む場合、これは確率微分方程式と呼ばれている。この確率微分方程式は、初期値問題と境界値問題に大別できる。前者に該当するものとしては、不規則外力を受ける構造物の不規則振動解析がある。この種の解析にはこれまで数多くの研究実績が蓄積されている。他方、不規則境界値問題に分類されるものに、不規則荷重を受ける構造物の静的応答解析、不規則初期不整を有する構造物の座屈荷重の変動解析等がある。これらの解析は、一般的に初期値問題より取扱いが困難であるために、効果的な解析手法が確立されていない。不規則応答解析の観点から見た場合、応答は本質的に非定常応答となる。これらの解析には専らGreen関数による手法が用いられているが、この手法は解析解を得るのに適した解法であり、適用範囲が限定される。複雑な構造物の解析に対しては、数値計算を主体として効果的な解法が望まれる。

著者は、不規則境界値問題の一解法をすでに報告している。[1][2] この解法は、境界値問題を初期値問題に変換して解くものである。ここでは、不規則初期値問題と不規則境界値問題の簡単な例題により、両者の類似性について検討すると共に、両者の統一した解法について報告する。

2、初期値問題と境界値問題の定式化

初期値問題と境界値問題の具体的な例として、図-1に示した不規則外力を受ける1自由度系の振動と、不規則分布荷重を受ける単純ばりを考える。それぞれの支配方程式を状態空間で表示する。

1自由度系の振動　　状態変数：$\mathbb{X}(t)=[\,x(t)\ \dot{x}(t)\,]^T$ ----------- (1)

運動方程式　$\dot{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{A}\mathbb{X}(t)+\mathbb{F}(t)$　，初期条件　$\mathbb{X}(0)=\mathbb{X}_0$ -------- (2)

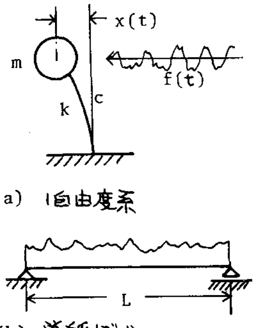
ここに、$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -2\rho\omega\end{bmatrix}$　$\mathbb{F}(t)=\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$　ω：固有振動数，ρ：減衰定数，$f(t)$：不規則外力

はりの基礎方程式　　状態変数：$\mathbb{X}(x)=[\,w(x)\ \phi(x)\ M(x)\ Q(x)\,]^T$ ------- (3)

ここに，$w(x)$，$\phi(x)$，$M(x)$，$Q(x)$はそれぞれ，x点のたわみ，たわみ角，曲げモーメント，せん断力を表す。

$$\left.\begin{array}{l}\text{支配方程式}\quad d\mathbb{X}(x)/dx=\mathbb{A}\mathbb{X}(x)+\mathbb{F}(x)\\ \quad\text{境界条件：}\mathbb{X}(0)=\mathbb{X}_0\ ,\ \mathbb{X}(l)=\mathbb{X}_l\end{array}\right\}\ \text{---------}(4)$$

なお　$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/EI & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　$\mathbb{F}(x)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -g(x)\end{bmatrix}$



(a) 1自由度系

(b) 単純ばり

図-1 解析モデル

状態空間で表示すると、両者は、(2)式と(4)式のように、線形微分方程式の形式で表現できる。

$$\mathbb{X}(\lambda)=e^{\mathbb{A}\lambda}\mathbb{X}_0+\int_0^{\lambda}e^{\mathbb{A}(\lambda-\sigma)}\mathbb{F}(\sigma)d\sigma\ \text{------}(5)$$

この方程式の解は、(5)式で与えられる。$e^{\mathbb{A}\lambda}$は，状態遷移行列（格間伝達マトリックス）であり，(2)式と(4)式の場合は，それぞれ(6)、(7)式で与えられる。

1自由度系の振動の場合

$$e^{\mathbb{A}(\lambda-\sigma)}=\begin{bmatrix}e^{-\rho\omega(\lambda-\sigma)}\{\cos\bar{\omega}(\lambda-\sigma)+\rho\omega\sin\bar{\omega}(\lambda-\sigma)/\bar{\omega} & e^{-\rho\omega(\lambda-\sigma)}\sin\bar{\omega}(\lambda-\sigma)\\ -\omega^2e^{-\rho\omega(\lambda-\sigma)}\sin\bar{\omega}(\lambda-\sigma) & e^{-\rho\omega(\lambda-\sigma)}\{\cos\bar{\omega}(\lambda-\sigma)-\rho\omega\sin\bar{\omega}(\lambda-\sigma)/\bar{\omega}\end{bmatrix}\ \text{------}(6)$$

ただし，$\bar{\omega}=(1-\rho^2)^{1/2}\omega$

はりの場合

$$e^{\mathbb{A}(\lambda-\sigma)}=\begin{bmatrix}1 & x & -x^2/2EI & -x^3/6EI\\ 0 & 1 & -x/2EI & -x^2/2EI\\ 0 & 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\ \text{---}(7)$$

3. 不規則応答解析

それぞれの場合の，不規則外力 $f(t)$ と不規則分布荷重 $g(x)$ を白色雑音過程でモデル化する。一般的な確率過程についても解析は可能である。このとき、外力ベクトルは，次式のような，

$$\left.\begin{array}{ll}(i) & E[\mathbb{F}(s)]=\mathbb{0}\\ (ii) & E[\mathbb{F}(s_1)\mathbb{F}(s_2)^T]=\mathbb{Q}(s_1)\delta(s_1-s_2)\end{array}\right\} \quad ----(8)$$

確率特性を有する。

応答についても、平均値回りの変動に着目すると、応答の共分散 $\mathbb{R}(s)$ は，

$$\mathbb{R}(s)=E[\mathbb{X}(s)\mathbb{X}(s)^T] \quad (9)$$

で定義される。共分散応答は，次式で与えられる。

$$\mathbb{R}(s)=e^{\mathbb{A}s}\mathbb{R}_0e^{\mathbb{A}^Ts}+e^{\mathbb{A}s}\int_0^s E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(\sigma)^T]\,e^{\mathbb{A}(s-\sigma)}d\sigma+\int_0^s e^{\mathbb{A}(s-\sigma)}E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(\sigma)^T]\,d\sigma\, e^{\mathbb{A}^Ts}+\int_0^s e^{\mathbb{A}(s-\sigma)}\mathbb{Q}(\sigma)e^{\mathbb{A}(s-\sigma)}d\sigma \quad ---(10)$$

両辺をSで微分すると、共分散方程式が得られる。

$$\frac{d}{ds}\mathbb{R}(s)=\mathbb{A}\mathbb{R}(s)+\mathbb{R}(s)\mathbb{A}^T+e^{\mathbb{A}s}E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(s)^T]+E[\mathbb{F}(s)\mathbb{X}_0^T]e^{\mathbb{A}^Ts}+\mathbb{Q}(s) \quad ---(11)$$

(a) 初期値問題の場合[1]

通常初期条件と外力は独立であり、また初期条件は全て与えられている。従って、共分散方程式も次のようなマトリックス微分方程式の初期値問題として定式化される。

$$\dot{\mathbb{R}}(t)=\mathbb{A}\mathbb{R}(t)+\mathbb{R}(t)\mathbb{A}^T+\mathbb{Q}(t),\quad \mathbb{R}(0)=\mathbb{R}_0 \quad ----(12)$$

ただし、$\mathbb{R}_0$ は初期条件の分散 $E[\mathbb{X}_0\mathbb{X}_0^T]$ である。

さらに、$t\to\infty$ の応答を考えると、定常応答の解が得られ，このとき、共分散方程式は、連立方程式となる。

$$\mathbb{A}\mathbb{R}(t)+\mathbb{R}(t)\mathbb{A}^T+\mathbb{Q}(t)=\mathbb{0} \quad ----------(13)$$

(b) 境界値問題の場合[2]

境界値問題では，境界条件と外力が独立でないことと、初期値問題に変換するプロセスが必要となる。すなわち、共分散応答解析は，マトリックス微分方程式の境界値問題となる。解法には伝達マトリックスの手法[3]を援用する。左端の0でない要素 $\tilde{\mathbb{X}}_0$ を抽出する境界マトリックス $\mathbb{B}$ と，右端の0となる要素 $\tilde{\mathbb{X}}_\ell$ を抽出する境界マトリックス $\mathbb{B}'$ を用いる。

$$\mathbb{X}_0=\mathbb{B}\tilde{\mathbb{X}}_0,\quad \mathbb{B}'\mathbb{X}_\ell=\tilde{\mathbb{X}}_\ell=\mathbb{0} \quad -------(14)$$

i) 左端境界条件と外力の相関関数

$$\mathbb{B}'e^{\mathbb{A}\ell}\mathbb{B}E[\tilde{\mathbb{X}}_0\mathbb{F}(x)^T]+\mathbb{B}'e^{\mathbb{A}(\ell-x)}\mathbb{Q}(x)=\mathbb{0} \quad ----(15)$$

$$E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}^T(x)]=\mathbb{B}E[\tilde{\mathbb{X}}_0\mathbb{F}(x)^T],\quad E[\mathbb{F}(x)\mathbb{X}_0^T]=E[\mathbb{X}_0\mathbb{F}(x)^T]^T$$

ii) 左端境界条件の共分散

(10)式の右辺2項以降は、外力に関する項であり，これを $\mathbb{P}(\ell)$ で表し、荷重項と称する。すなわち，

$$\mathbb{R}(\ell)=e^{\mathbb{A}\ell}\mathbb{R}_0e^{\mathbb{A}^T\ell}+\mathbb{P}(\ell) \quad (16)$$

従って，$\tilde{\mathbb{R}}(\ell)=E[\tilde{\mathbb{X}}_\ell\tilde{\mathbb{X}}_\ell^T]$ で定義すると，

$\mathbb{B}'\tilde{\mathbb{R}}(\ell)\mathbb{B}'^T=\mathbb{0}$ であることにより，

$$\mathbb{B}'e^{\mathbb{A}\ell}\mathbb{B}\tilde{\mathbb{R}}_0\mathbb{B}^Te^{\mathbb{A}^T\ell}\mathbb{B}'^T+\mathbb{B}'\mathbb{P}(\ell)\mathbb{B}'^T=\mathbb{0} \quad (17)$$

$$\mathbb{R}_0=\mathbb{B}\tilde{\mathbb{R}}_0\mathbb{B}^T$$

を得る。なお，$\tilde{\mathbb{R}}_0=E[\tilde{\mathbb{X}}_0\tilde{\mathbb{X}}_0^T]$

これらの量が得られると、後の解析は初期条件と同じ手順で解析できる。

4. 数値計算例

(a) 1自由度系の不規則応答解析

$\mathbb{R}_0=\mathbb{0}$ のときの(12)式の解は，次式で与えられる。

$$E[x^2]=A_1[1-e^{-2\rho\omega t}\{\bar{\omega}^2-\rho\omega\bar{\omega}\sin 2\bar{\omega}t-2(\rho\omega\sin\bar{\omega}t)\}/\bar{\omega}^2],\quad A_1=\sigma^2/4\rho\omega^3$$

$$E[x\dot{x}]=A_2e^{-\rho\omega t}\sin 2\bar{\omega}t,\quad A_2=\sigma^2/2\bar{\omega}$$

$$E[\dot{x}^2]=A_3[1-e^{-2\rho\omega t}\{\bar{\omega}^2-\rho\omega\bar{\omega}\sin 2\bar{\omega}t+2(\rho\omega\sin\bar{\omega}t)^2\}/\bar{\omega}^2],\quad A_3=\sigma^2/4\rho\omega$$

なお，外力は，$E[f(t_1)f(t_2)]=\sigma^2\delta(t_1-t_2)$ である。

(b) 不規則分布荷重を受ける単純ばり

○荷重と左端境界条件との相関

$$E[\phi_0 g(x)]=\sigma^2\ell^2\xi(2-3\xi+\xi^2)/6EI$$

$$E[Q_0 g(x)]=\sigma^2(1-\xi)$$

ただし，$\xi=x/\ell$, $E[g(x_1)g(x_2)]=\sigma^2\delta(x_1-x_2)$

○左端境界条件の分散

$$E[\phi_0^2]=2\sigma^2\ell^5/945E^2I^2,\quad E[\phi_0Q_0]=\sigma^2\ell^3/45EI$$

$$E[Q_0^2]=\sigma^2\ell/3$$

○応答の分散

$$E[w(x)^2]=B_1\xi^2(2-7\xi^2+14\xi^4-12\xi^5+3\xi^6),\quad B_1=\sigma^2\ell^7/945E^2I^2$$

$$E[\phi(x)^2]=B_2(2-21\xi^2+105\xi^4-126\xi^5+42\xi^6),\quad B_2=\sigma^2\ell^5/945E^2I^2$$

$$E[M(x)^2]=B_3\xi^2(1-\xi^2),\quad B_3=\sigma^2\ell^3/3$$

$$E[Q(x)^2]=B_4(1-3\xi+3\xi^2),\quad B_4=\sigma^2\ell/3$$

以上のように、共分散の変動を共分散方程式で表現すると、微分方程式を基礎にした応答の表現が可能になる。上述の計算は全て計算機による数値解析が可能な形になっている。

〔参考文献〕(1) 岡林：長崎大学研究報告第17号，(2) 岡林：土木学会論文集第316号 1981年，(3) 成岡他：伝達マトリックス法，培風館