

ケーブルの面外非線形自由振動

長崎大学工学部 学生員 ・ 田川 賢
長崎大学工学部 正 員 高橋 和雄

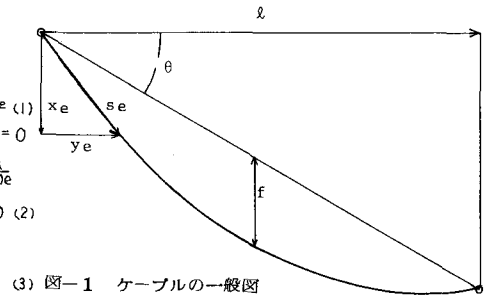
1. まえがき ケーブルはその幾何学的非線形性により、一般に面内と面外の振動が連成する三次元振動を生じる。面内・面外連成応答に関しては動的効力が作用する場合の応答解析はすでに行われているが、ケーブルの三次元非線形固有振動特性は十分に把握されていない。そこで本研究は、調和バランス法を用いてケーブルの面外非線形自由振動とそれに付随する面内振動を各種のサゲ比をパラメータに解析し、ケーブルの面外非線形自由振動を明らかにするものである。

2. 解法 ケーブルの運動方程式は次のように与えられる。

$$L_1(u, v, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \left(C_0 \frac{1}{x_0} + C_1^2 x_0^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_0} + C_1^2 x_0 y_0 \frac{\partial v}{\partial x_0} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(x_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} + y_0 \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 \right\} \left(x_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} + y_0 \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \right] - \frac{P_0 \cos \Omega t}{P_0} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(u, v, w) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \left(C_0 \frac{1}{x_0} + C_1^2 y_0^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x_0} + C_1^2 x_0 y_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(x_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} + y_0 \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \frac{\partial v}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 \right\} \left(y_0 \frac{\partial v}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} \right) \right] - \frac{P_0 \cos \Omega t}{P_0} = 0 \quad (2)$$

$$L_3(u, v, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \left(C_0 \frac{1}{x_0} + C_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_0} \right) \frac{\partial w}{\partial x_0} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(x_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} + y_0 \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \frac{\partial w}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \right] - \frac{P_0 \cos \Omega t}{P_0} = 0 \quad (3)$$



(3) 図-1 ケーブルの一般図

ここに、 u, v : ケーブルの面内水平・鉛直変位、 w : 面外変位、 t : 時間、 x_0 : ケーブルの初期形状に与える曲線座標、 $C_0 = \sqrt{H_0/P_0}$: ケーブルの横波伝播速度、 H_0 : ケーブルの初期水平張力、 P_0 : 単位長さ当りの質量、 $C_1 = \sqrt{EA/P_0}$: 縦波伝播速度、 E : ヤング率、 A : 断面積、 P_0, P_0, P_0 : 荷重強度、 Ω : 荷重の内振動数、 x_0, y_0 : 初期形状 x_0 による常微分、図-1において、 θ : 支点間傾斜角、 f : ケーブルサゲ、 l : 支点間水平距離を示す。

$$\text{式(1),(2),(3)の解を次式で仮定する。} u = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) U_n(x_0), v = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) V_n(x_0), w = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) W_n(x_0) \quad (4)$$

ここに、 P_n, Q_n : 未知の時間関数、 $U_n(x_0) = \sum_{i=1}^m P_{ni} \sin \frac{\pi i x_0}{l^*}$, $V_n(x_0) = \sum_{i=1}^m P_{ni} \sin \frac{\pi i x_0}{l^*}$, $W_n(x_0) = \sum_{i=1}^m P_{ni} \sin \frac{\pi i x_0}{l^*}$: 面内・面外線形振動の第 n 次固有振動形、 l^* : 初期ケーブル長。式(4)を式(1),(2),(3)に代入し Galerkin法を適用すれば、 P_n, Q_n に関する連立非線形常微分方程式群が得られる。

$$\begin{aligned} m_n^2 \ddot{P}_n + k_n^2 P_n + k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n P_j P_i + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n Q_j Q_i + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n P_j P_i + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n P_j Q_i + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n Q_j Q_i = 8 \gamma^* f_n^2 \cos \Omega t \\ m_n^2 \ddot{Q}_n + k_n^2 Q_n + k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n Q_j Q_i + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n P_j P_i + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n P_j Q_i + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n Q_j Q_i = 8 \gamma^* f_n^2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 $k_2 = C_0/C_1$: ケーブルの縦波・横波伝播速度比、 $\gamma^* = P_0/8H_0$: 初期形状を放物線に近似した場合のサゲ比。

式(5)の解を、 $P_n = \sum_{e=1}^m a_n^e \cos e \omega t$, $Q_n = \sum_{e=1}^m b_n^e \cos e \omega t$ (ここに、 a_n^e, b_n^e : 未定定数) (6) と仮定し代入して調和バランス法を適用すれば、 a_n^e, b_n^e の連立非線形代数方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (k_n^2 - m_n^2 e^2 \omega^2) a_n^e + k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n f_{jpe}^e + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n f_{jpe}^e + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n f_{jpe}^e + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n f_{jpe}^e = 8 \gamma^* f_n^2 \delta_{en} \\ (k_n^2 - m_n^2 e^2 \omega^2) b_n^e + k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n f_{jpe}^e + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n f_{jpe}^e + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n f_{jpe}^e + \frac{1}{2} k_2^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m k_{ij}^n f_{jpe}^e = 8 \gamma^* f_n^2 \delta_{en} \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)を適当な初期値のもとで Newton-Raphson法による数値解析を行えば、必要な解が得られる。

3. 面外非線形自由振動特性 ケーブルの運動方程式中に面外変位 w の2次の項が含まれないために、面外振動は主共振と3倍の高調波共振が生じ、面外振動により面内方向には静的付加荷重と2倍の振動数をもつ動的付加荷重による面内応答が生じる。そのため面外方向の主共振と面内方向に生じる面外振動の2倍の振動数をもつ応答が、振動数の接近する領域で共振を起こすと考えられる。図-2は水平ケ

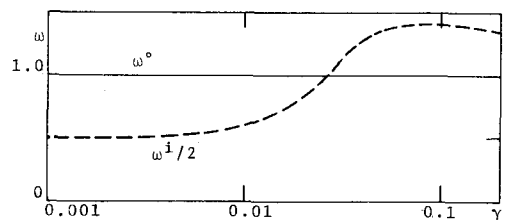


図-2 面内および面外固有振動の関係

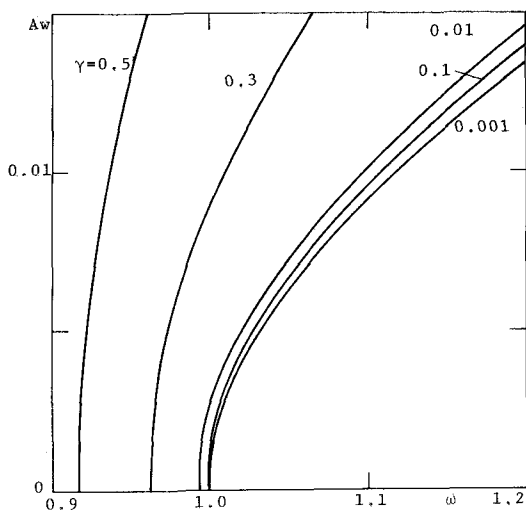


図-3 水平ケーブルの面外非線形自由振動
(影響領域外)

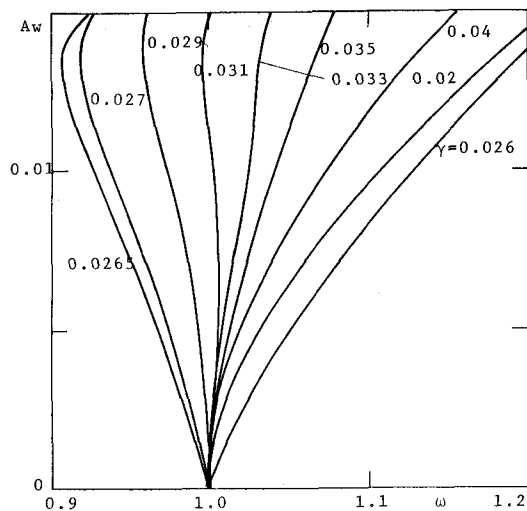


図-4 水平ケーブルの面外非線形自由振動
(影響領域内)

ケーブルのサグ比 γ に対する面外固有振動数 ω^0 (実線) と面内固有振動数の半分 $\omega^0/2$ (破線) の関係を示したものである。水平ケーブルでは ω^0 と $\omega^0/2$ の関係は $\gamma = 0.026$ で一致 (共振点) し、これを境に大小関係は逆転している。 $\omega^0 > \omega^0/2$ の場合には同位相の面内振動が、 $\omega^0 < \omega^0/2$ の場合には逆位相の面内振動が引き起こされる。図-3, 4 は水平ケーブルの面外非線形自由振動曲線を示したもので、図-3 は面内振動の影響領域外 ($\gamma < 0.02, \gamma > 0.04$) の、図-4 は影響領域内 ($0.02 < \gamma < 0.04$) のケーブルの振動数比 ω と振幅比 A_w の関係を示している。図-5 は面外振動に付随する面内応答の振動数比 ω と振幅比 A_w の関係を示している。図-3, 4, 5 よりわかるように影響領域外では面内振動の影響を受けず振動数比と振幅比の関係は硬化バネ特性を示す。影響領域内では共振による強い面内振動の影響を受け、振動数比と振幅比の関係は $\gamma = 0.02 \sim 0.026$ のケーブルでは同位相の面内振動の影響により硬化バネ特性を示し、 $\gamma = 0.0265 \sim 0.04$ のケーブルでは逆位相の面内振動の影響により軟化バネ特性を示している。

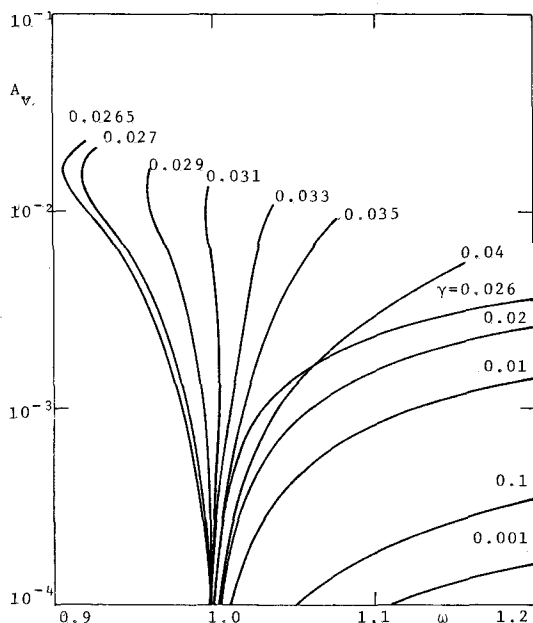


図-5 面外振動に伴う面内非線形応答

傾斜ケーブルにおいては、常に $\omega^0 > \omega^0/2$ であるため共振点は存在せず、面外振動に付随する面内応答は常に同位相となり、振動数比と振幅比の関係は硬化バネ特性を示す。

4. まとめ ケーブルの面外非線形自由振動における振動数比と振幅比の関係は一般に硬化バネ特性を示し、付随する面内非線形応答は小さい。しかし共振点近傍のある範囲のサグ比のケーブルにおいては強い面内・面外連成応答が生じ、面外非線形自由振動に付随する面内応答の影響を受けて軟化バネ特性を示す。

〈参考文献〉1) 山口宮田伊藤：正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析，土木学会論文報告集，第308号，1981，PP.37～45，2) 高橋村中永田：三次元非線形振動，長崎大学工学部研究報告集，第16号，昭和56年7月，PP.49～56，3) 山口伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集，1979，PP.29～36。