

ケーブルの面内非線形分岐応答

長崎大学工学部 学生員 ○川上広行

” 坂井秀一

正 員 高橋和雄

1. まえがき 本質的に幾何学的非線形性を有するケーブルの動特性を明らかにするためには、非線形振動特性の把握が不可欠である。非線形系の応答には付随型と分岐型の2種類がある。著者らはこれまで付随型の応答を明らかにしてきたが¹⁾、分岐型の応答は未だ取り扱われていない。そこで本研究では面内加振を受けるケーブルの分岐型の応答である $1/2$ および $1/3$ の分数調波共振および面内対称加振を受ける水平ケーブルの逆対称分岐応答を明らかにするものである。

2. 運動方程式 図-1に示すようなケーブルの面内振動の運動方程式は次のように与えられる²⁾。

$$L_1(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(C_0^2 \frac{1}{\chi_e} + C_1^2 \chi_e^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + C_1^2 \chi_e y_e \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\chi_e \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e \frac{\partial v}{\partial s_e} \right] \frac{\partial u}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(\chi_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) - \frac{P_0 \cos \Omega t}{\rho} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(u, v) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(C_0^2 \frac{1}{\chi_e} + C_1^2 \chi_e^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + C_1^2 \chi_e y_e \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\chi_e \frac{\partial v}{\partial s_e} + y_e \frac{\partial u}{\partial s_e} \right] \frac{\partial v}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) - \frac{P_0 \cos \Omega t}{\rho} = 0 \quad (2)$$

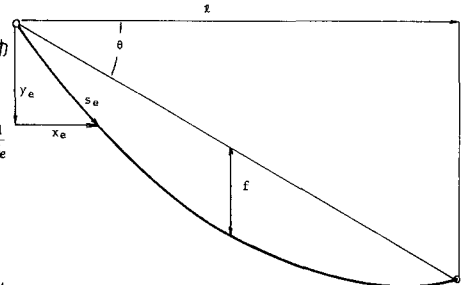


図-1 ケーブルの一般図

ここに、 u, v ：ケーブルの面内水平変位、鉛直変位、 t ：時間、 s_e ：ケーブルの初期形状に沿う曲線座標、 C_0 、 C_1 ：ケーブルの横波、縦波伝播速度、 P_0 ：荷重強度、 Ω ：外力の円振動数、 χ_e, y_e ：ケーブルの初期形状。また、図-1において、 θ ：ケーブルの傾斜角、 f ：ケーブルサグ

3. 解法および応答の分類 式(1)、(2)の解を次のような変数分離形に仮定する。

$$u = \ell \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) U_i(s_e), \quad v = \ell \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) V_i(s_e) \quad (3)$$

ここに、 $P_i(t)$ ：未知の時間関数、 $U_i(s_e) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{in}^u \sin \frac{n\pi s_e}{\ell^*}$ 、 $V_i(s_e) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{in}^v \sin \frac{n\pi s_e}{\ell^*}$ ：面内線形振動の第 i 次振動形、 ℓ^* ：初期ケーブル長

式(3)を式(1)、(2)に代入してGalerkin法を適用すれば、 P_n についての次の連立非線形常微分方程式が得られる。

$$m_n \ddot{P}_n + \sum_{i=1}^{\infty} k_{in} P_i + k_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{ijn} P_i P_j + \frac{k_2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k_{ijkn} P_i P_j P_k = P_n \cos \omega t \quad (4)$$

ここに、 $k = C_1/C_0$ ：ケーブルの縦波-横波伝播速度比、 $\omega = \Omega/\omega_1$ 、 $T = \omega_1 t$

式(4)の非線形微分方程式の応答の分類をすれば、図-2に示すとおりである。分岐型の応答を求めるにあたっては付随成分の影響は無視できるから、次のように解を仮定することができる³⁾。

① $1/2$ 分数調波共振 $P_n = C_0^1/2 + C_{1/2}^n \cos \frac{1}{2} \omega t + S_{1/2}^n \sin \frac{1}{2} \omega t + C_1^n \cos \omega t$ (5) ここに、 $C_0^1, C_{1/2}^n, S_{1/2}^n, C_1^n$ ：未定定数

② $1/3$ 分数調波共振 $P_n = C_0^1/2 + C_{1/3}^n \cos \frac{1}{3} \omega t + S_{1/3}^n \sin \frac{1}{3} \omega t + C_1^n \cos \omega t$ (6)

③ 面内対称加振による逆対称分岐応答

$$P_1 = C_0^1/2 + C_1^1 \cos \omega t$$

$$P_2 = C_0^2/2 + C_{1/2}^2 \cos \frac{1}{2} \omega t + S_{1/2}^2 \sin \frac{1}{2} \omega t + C_1^2 \cos \omega t + S_1^2 \sin \omega t$$

(7)

式(5)もしくは式(6)、(7)を式(4)に代入して、調和バランス法を適用すれば、未定定数を求めるための連立非線形代数方程式が得られ

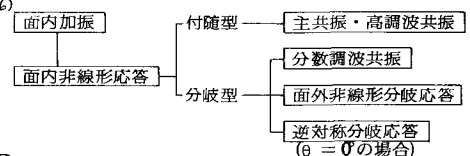


図-2 応答の分類

る。これにNewton-Raphson法の繰り返し計算を用いれば、必要な解が得られる。

4. $1/2$ 分数調波共振 水平ケーブル($k=30, \theta=0^\circ$)を1自由度系とみなして、サブ比 $\gamma=0.1$ および 0.026 の2ケースに対して、主調波応答(C_1)と $1/2$ 分数調波共振($S_{1/2}, C_{1/2}$)を求めれば、図-3, 4のとおりである。また、図-5は図-4の振動数比 $\omega=4.0$ 付近の詳細である。これらの図において横軸は無次元加振振動数で、縦軸はケーブル中央点の無次元振幅である。また、図中の実線は外力と同位相の応答を、破線は外力と逆位相の応答をそれぞれ示すものである。 $\gamma=0.1$ のケーブルは振動数と振幅の関係が硬化バネ特性をもつ場合で、 $\gamma=0.026$ が軟化バネ特性をもつ場合である。¹⁾ 主調波応答(C_1)は常に生ずる応答で、 $\gamma=0.1$ の場合 $\omega=2.8$ 付近、 $\gamma=0.026$ の場合 $\omega=2.0$ 付近で共振状況となる。これに対して $1/2$ 分数調波共振は通常はゼロであり、固有振動数の2倍付近の加振振動数($\omega=5.6, 4.0$)でのみ分岐的に起こる。この分岐応答の位相は 0° または 180° である。図-3の2次の非線形項が小さい $\gamma=0.1$ のケーブルでは分岐がある場合とない場合の主調波応答はほとんど差異がなく、 $1/2$ 分数調波共振は主調波応答に影響を及ぼさない。これに対して、2次の非線形項が支配的な $\gamma=0.026$ のケーブルでは、図-5に示すように $1/2$ 分数調波共振は主調波応答に大きな影響を及ぼすことがわかる。

5. まとめ 本研究はケーブルの面内分岐応答解析のための定式化を示し、 $1/2$ 分数調波共振を明らかにしたものである。 $1/2$ 分数調波共振に及ぼすケーブルのパラメータの影響、 $1/3$ 分数調波共振および面内対称加振による逆対称分岐応答については講演時に発表する。

- <参考文献> 1) 高橋・藤本・戸田：ケーブルの面内非線形振動，長崎大学工学部研究報告第16号，S.56 pp.39~47
 2) 山口・伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集第286号，S.54 pp.29~36
 3) 皆川：非線形振動の数値解析，日本建築学会論文報告集第279号，S.54 pp.21~27

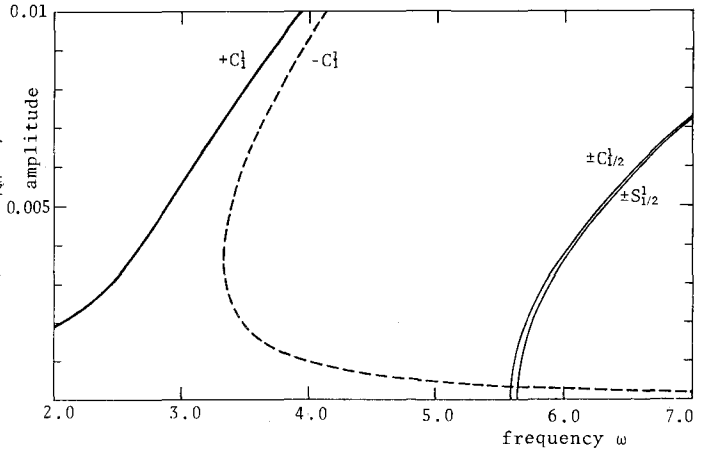


図-3 水平ケーブルの分数調波共振 ($\gamma=0.1$)

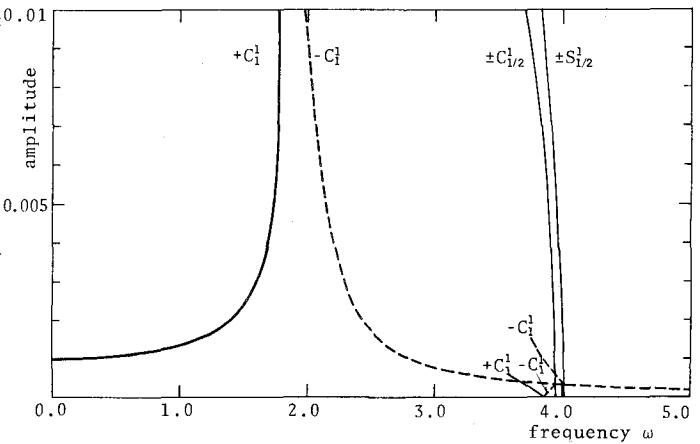


図-4 水平ケーブルの分数調波共振 ($\gamma=0.026$)

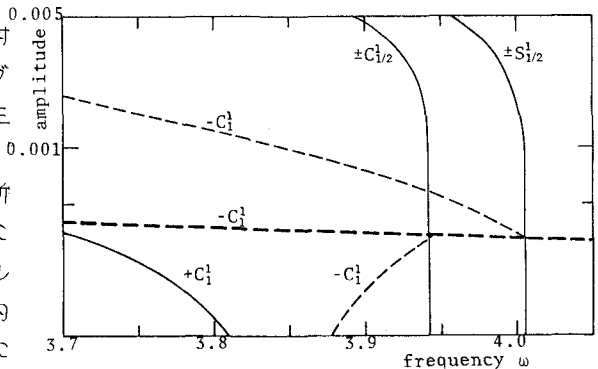


図-5 図-4の $\omega=4.0$ 付近の詳細