進行地震波を受ける橋梁の応答について

九州産業大学工学部　正員　吉村 健，学生員　荒牧信介
同　　　　　　　　　学生員 ○藤原 猛，坂田正二，森下正浩

1 まえがき

近年、長径間橋梁や橋長の大きい多径間連続桁が多く架設されている。これらの橋梁の耐震設計では、各支点に作用する地震波の相異あるいは位相差を考慮した応答解析を行なう必要があり、その解析法や応答解析に関する研究が行なわれている。たとえば、小坪らは、進行地震波を受ける橋梁について応答スペクトルを用いた簡便な応答解析法を提案している[1]。

本研究では、進行地震波を受ける上記橋梁構造物の動的挙動を確率論的に議論することを目的としている。本報告はその第1報であって、相似則に基づく応答の評価について考察したものである。

2 解析法

(イ)仮定　こゝでは次のことがらを仮定する。①波速は一定　②波形の保持　③エルゴード的定常ランダム過程　④線型応答

(ロ)運動方程式[1]　図－1に示すような橋梁において、j支点のみが $\psi_j(t)$ なる変位を行なう場合を考える。このときの橋梁の $\bar{x}$ 点における静止座標からの変位 $\bar{z}(\bar{x},t)$ を次式で表わす。

$$\bar{z}(\bar{x},t)=y(\bar{x},t)+f_j(\bar{x})\psi_j(t) \tag{1}$$

こゝに、f_j は、j支点に単位の静的変位を与えたときのはりの弾性線，$\bar{y}$ は f_j を基線とした動的相対変位であり、t は時間を表わす。

いま、進行地震波 $w(t-\xi/V)$ が橋梁に作用するものとすると、この地震波は $\psi_j(t)=w(t-\bar{x}_j/V)$ なる形でj支点を変位させる。したがって、式(1)は

$$\bar{z}(\bar{x},t)=\bar{y}(\bar{x},t)+f_j(\bar{x})\,w(t-\bar{x}_j/V) \tag{1'}$$

となる。文献(1)によれば，ノーマルモード法を用いると，このときのr次の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{\bar{\eta}}_r(t)+2\zeta_r\omega_r\dot{\bar{\eta}}_r(t)+\omega_r^2\bar{\eta}_r(t)=-\sum_j\beta_{rj}\,\ddot{\bar{w}}(t-\bar{x}_j) \tag{2}$$

$$\beta_{rj}=\frac{\int_0^L\bar{\rho}(\bar{x})f_j(\bar{x})\Phi_r(\bar{x})d\bar{x}}{\int_0^L\bar{\rho}(\bar{x})\Phi_r^2(\bar{x})d\bar{x}}$$

こゝに $\bar{\eta}_r$, ζ_r, ω_r, Φ_r は、それぞれr次の基準座標，減衰定数，固有円振動数，固有振動モードであり，$\bar{\rho}$ は単位長さあたりの質量，L は橋長である。

こゝで、式(2)の各物理量を次のように無次元化する。
$\tau=Vt/L$（無次元時間），$k_r=\omega_r b/V$（無次元固有振動数）
$x=\bar{x}/L$，$w(\tau-x_j)=\bar{w}(t-\bar{x}_j/V)/L$，$\eta_r=\bar{\eta}_r/L$，
$d\eta_r/d\tau=\eta_r'=\dot{\bar{\eta}}_r/V$，$\eta_r''=\ddot{\bar{\eta}}_r/(V^2L)$，$\rho(x)=\bar{\rho}(\bar{x})/\rho_0$
これらの無次元量を用いると，式(2)は

$$\eta_r''+2\zeta_r k_r\eta_r'+k_r^2\eta_r=-\sum_j\beta_{rj}\cdot w''(\tau-x_j) \tag{3}$$

$$\beta_{rj}=\frac{\int_0^1\rho(x)f_j(x)\Phi_r(x)dx}{\int_0^1\rho(x)\Phi_r^2(x)dx}$$

(ハ)周波数応答　調和的進行地震波 $w(\tau-x_j)=w_0e^{ik(\tau-x_j)}$（$w_0$ は振幅）に対する式(3)の定常振動解が周波数応答であり、次式で与えられる。

$$\eta_r(t)=X_r(k)\cdot w_0e^{ik\tau}$$
$$y(x,t)=\sum_r\Phi_r(x)\eta_r(t)$$
$$=\sum_r\Phi_r(x)X_r(k)\cdot w_0e^{ik\tau}$$
$$\equiv X(x,k)\cdot w_0e^{ik\tau} \tag{4}$$

こゝに，X_r は，r次に関する変位入力－変位応答の周波数応答関数であり，次式で与えられる。

$$X_r(k)=\frac{-k^2\sum_j\beta_{rj}e^{-ikx_j}}{(k_r^2-k^2)+i2\zeta_r k_r k}$$

$$=\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\frac{-\sum_j\beta_{rj}e^{-ikx_j}}{\left[(\omega_r/\omega_1)^2-(\omega/\omega_1)^2\right]+i2\zeta_r(\omega_r/\omega_1)(\omega/\omega_1)} \tag{5}$$

(ニ)　変位応答のパワースペクトル密度関数（P.S.D）

文献(2)に記したように、進行インパルス入力 $\delta(\tau-x_j)$ が橋梁に作用するときの応答を $h(\tau,x)$ と書くことにすると，任意波形の進行波入力 $w(\tau-x_j)$ が作用するときの応答は、

$$g(\tau,x)=\int_{-\infty}^{\tau}w(\tau_1-x_1)h(\tau-\tau_1,x)dx \tag{6}$$

で与えられる。橋梁の前端における入力記録 $w(\tau-x_1)$ とインパルス応答とのたゝみこみ積分として応答が与えられることを式(6)は示している。式(6)を用いると，進行地震波を受ける橋梁の変位応答のP.S.Dが、1固定点入力に対する応答[3]の場合と形式的に全く同一の式で表わされることが容易に示される。すなわち、

$$S_\eta(x,k)=|X(x,k)|^2S_w(k) \tag{7}$$

$$|X(x,k)|^2 = X(x,k)\cdot X^*(x,k)$$
$$= \left[\sum_r \Phi_r(x) R_e X_r(k)\right]^2 + \left[\sum_r \Phi_r(x) I_m X_r(k)\right]^2$$
$$\simeq \sum_r \left[\Phi_r(x)\right]^2 |X_r(k)|^2$$

たゞし，$\zeta_r \ll 1$ と仮定した。こゝに S_η と S_w は，それぞれ、変位入力と変位応答の P.S.D であり、Re と Im は、それぞれ実部と虚部を表わす。多点入力を受ける系であるが，前記仮定①と②により、入力のクロススペクトル密度は式(7)には含まれない。クロススペクトル密度の寄与は $X_r(k)$ 中の位相係数 e^{-ikx_j} として含まれるのである。

$\boxed{3}$ 相似則　(イ) 無次元の波速と波長　式(5)右辺の無次元量 k_1 と k の物理的意味について考えてみる。まず、k_1 であるが，1次の固有振動数と固有周期を，それぞれ f_1 と T_1 と書くと，

$$2\pi/k_1 = V/f_1L = VT_1/L \qquad (8)$$

となる。つまり，$2\pi/k_1$ は，1次固有周期に相当する時間に，地震波が橋長 L の何倍伝播したかを表わす量であって、無次元波速である。次に，k については，

$$2\pi/k = V/fL = VT/L = V/L\cdot\lambda/V = \lambda/L \qquad (9)$$

となる。こゝに，T と λ は，それぞれ地震波の周期と波長を表わすものである。つまり、$2\pi/k$ は、橋長 L の何倍の波長の地震波であるかを表わす量であり，無次元波長である。

(ロ) 構造系の無次元量　はりの曲げ振動の微分方程式を無次元化すると次のようになる。

$$\rho(x)y''(\tau) + \frac{EI_0}{\rho_0 V^2 L^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{I(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} = -\sum_j \rho(x) f_j(x)\cdot w_0'' e^{ik(\tau - x_j)} \qquad (10)$$

こゝに w_0'' は加速度振幅．式(10)における構造系の無次元量は，$(\sqrt{EI_0/\rho_0}/L)/V$（分子は，はりを伝わる横波の波速に関する量．弾性波パラメータ），$\rho(x)$，$I(x)$ の３つである。

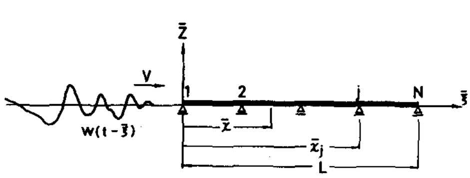
以上に述べた無次元化によって，次のような相似則が成り立つ．すなわち，幾何学的相似の他，構造系の３つの無次元量と減衰定数 ζ_r の等しい橋梁に，無次元波速・無次元波長の等しい地震波が作用するとき，無次元応答は同じである。なお，上記４つの構造系の無次元量の中の弾性波パラメータと $I(x)$ は，式(5)右辺では，振動数比 ω_r/ω_1 と固有振動モード $\Phi_r(x)$ に変換される。

$\boxed{4}$ 簡単な数値計算例　等スパンの３径間連続桁について数値計算を行なった。計算では，$I(x)$ と $\rho(x)$ は一定で，$\zeta_r = 2.5\times10^{-3}$ と仮定した。無次元波速は $2\pi/k_1 = 1, 0.5$ の２ケースである。スパン中央部における１次振動の $|X_1|^2$ を図-3に示す。無次元波速が $1(k_1=2\pi)$ と $0.5(k_1=4\pi)$ の場合，それぞれ，無次元波長成分が $1(k=2\pi)$ と $0.5(k=4\pi)$ の地震波と共振することが図からわかる。これらの波長成分は，桁の１次固有振動数と同一振動数の変位を各支点にもたらすわけである。図-2に示す無次元波長を有する地震波が桁に作用するときの変位応答の P.S.D. は図-4のようである。

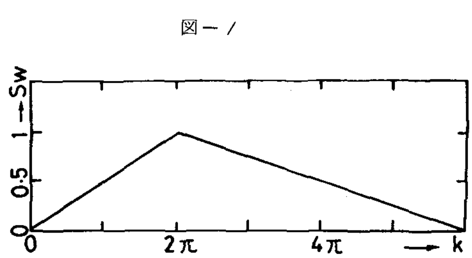
$\boxed{5}$ むすび　進行地震波を受ける橋梁の応答について、相似則に基づく応答評価の手法を提案した。

参考文献

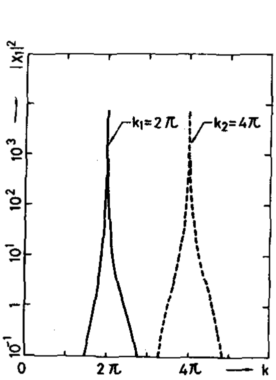
1) 小坪 清真　他：土木学会論文報告集，第270号，1978．
2) 吉村　健　他：第7回風工学シンポジウム論文集 1982．
3) J. D. Robson："Random Vibration, Elserier, 1964.



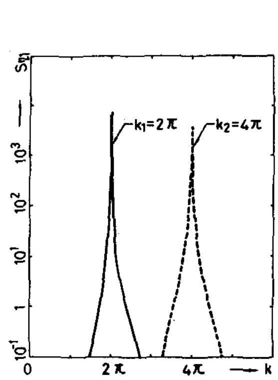
図－1



図－2



図－3



図－4