変厚矩形板の曲げの一解析法

長崎大学　正員　　崎山　毅
長崎大学　正員　○松田　浩

1．まえがき

変厚矩形板の曲げの問題について多くの研究が行なわれてきているが，任意の境界条件，荷重条件および変断面性に対する解析の容易さおよび解法の一般性という点に注目すれば，変厚矩形板の解法に関して，未だ検討の余地が残されていると考えられる。

本解法は，基礎微分方程式の積分方程式への変換と，積分方程式の近似解法の応用とにより，変厚矩形板の基礎微分方程式の近似解を求めようとするものである。

2．基礎方程式

平板のせん断力をQ_y, Q_x，ねじりモーメントをM_{xy}，曲げモーメントをM_y, M_x，たわみ角をθ_y, θ_x，たわみをwとすれば，一般的な矩形板の曲げに関する基礎微分方程式は次の連立偏微分方程式になる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0,\quad \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0,\quad \frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0,\quad \frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial \theta_y}{\partial y}=\frac{M_x}{D}\\&\frac{\partial \theta_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial \theta_x}{\partial x}=\frac{M_y}{D},\quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial \theta_y}{\partial x}=\frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\theta_x=\frac{Q_x}{Gt_s},\quad \frac{\partial w}{\partial y}+\theta_y=\frac{Q_y}{Gt_s}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ここに，$q=q(x,y)$：横荷重強度，E：弾性係数，G：せん断弾性係数，ν：ポアソン比，$h=h(x,y)$：板厚，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$：板剛度，$t_s=h/1.2$

式(1)を無次元化すると次の式(2)のように書き換えられる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial X_1}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial X_2}{\partial \eta}=-\bar{q},\quad \frac{\partial X_3}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial X_5}{\partial \eta}=\mu X_2,\quad \frac{\partial X_4}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial X_3}{\partial \eta}=\mu X_1,\quad \frac{\partial X_6}{\partial \zeta}+\nu\mu\frac{\partial X_7}{\partial \eta}=IX_4\\&\nu\frac{\partial X_6}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial X_7}{\partial \eta}=IX_5,\quad \frac{\partial X_7}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial X_6}{\partial \eta}=JX_3,\quad \frac{\partial X_8}{\partial \eta}+X_7=\kappa X_2,\quad \frac{\partial X_8}{\partial \zeta}+\mu X_6=\mu\kappa X_1\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

ここに，$(X_1,X_2)=(Q_y,Q_x)a^2/D_0(1-\nu^2)$，$(X_3,X_4,X_5)=(M_{xy},M_y,M_x)a/D_0(1-\nu^2)$，$(X_6,X_7)=(\theta_y,\theta_x)$，$X_8=w/a$，$x=a\eta$，$y=b\zeta$，a，b：矩形板の縦横の辺長，$\mu=b/a$，$\bar{q}=\mu k^2 q/q_0$，$k^2=q_0a^2/D_0(1-\nu^2)$，$q_0$：基準荷重強度，$I=\mu(1-\nu^2)(h_0/h)^3$，$J=2\mu(1+\nu)(h_0/h)^3$，$h_0$：基準板厚，$\kappa=Eh_0^3/10Ga^2h$，$D_0=Eh^3/12(1-\nu^2)$：基準板剛度

3．基礎微分方程式の近似解

基礎微分方程式(2)の各式を領域［i，j］において面積分し，積分方程式に変換する。次に等間隔の数値積分法の応用により，領域［i，j］の主要点（i，j）および従属点（f，g）の諸量を用いて，これらの積分方程式を離散表示すれば，無次元化された断面力および変形X_p（$p=1\sim8$）の主要点（i，j）における値X_{pij}に関する連立方程式が得られる。この連立方程式から領域［i，j］における主要点（i，j）の諸量X_{pij}と境界従属点および内部従属点（f，g）の諸量X_{pfg}との間の関係式が次のように求められる。

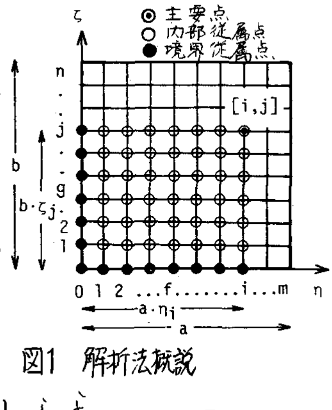

図1　解析法概説

$$\begin{aligned}X_{pij}=&\sum_{t=1}^{8}\Big\{\sum_{f=0}^{i}\beta_{if}A_{pt}\left[X_{tf0}-X_{tfg}(1-\delta_{fi})\right]\\&+\sum_{g=0}^{j}\beta_{jg}B_{pt}\left[X_{t0g}-X_{tig}(1-\delta_{gj})\right]+\sum_{f=0}^{i}\sum_{g=0}^{j}\beta_{if}\beta_{jg}C_{ptfg}X_{tfg}(1-\delta_{fi}\delta_{gj})\Big\}-\sum_{f=0}^{i}\sum_{g=0}^{j}\beta_{if}\beta_{jg}A_{p1}\bar{q}_{fg}\end{aligned}\quad(3)$$

ここに，$p=1\sim8$，β_{if}：等分割数値積分の重み係数，δ_{ij}：クロネッカーのデルタ

また式(3)より任意の領域[i,j]の主要点(i,j)における諸量X_{pij}は，この領域の境界従属点($f,0$)，($0,g$)における諸量X_{rfo}，X_{sog}（$r\neq2,5$，$S\neq1,4$）のみによって，式(4)のように表わすことができる。

$$X_{pij}=\sum_{d=1}^{4}\left(\sum_{f=0}^{i}a_{pijfd}X_{rfo}+\sum_{g=0}^{j}\bar{a}_{pijgd}X_{sog}\right)+g_{pij} \qquad (4)$$

ここに，X_{rfo}，X_{sog}：積分定数，g_{pij}：荷重項

なお，四辺単純支持の場合の積分定数と境界条件を図2に示す。

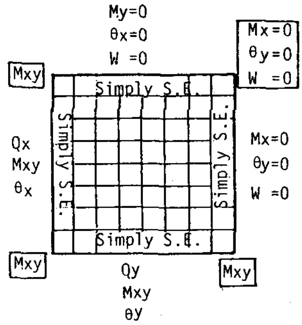

図2 積分定数と境界条件（四辺単純支持板）

4．数値計算結果および考察

本解析法による矩形板の数値解の収束性および精度を検討するために，既往の近似解法による解析結果および解析解との比較を行った。

まず，等分布荷重を満載する四辺単純支持等厚板の数値解析結果を表1に示す。同表より本解析法にもとずく断面力および変形の数値解は，分割数mの増加とともに一様に収束することがわかる。また，8～12程度の比較的粗い分割の下でも十分実用性のある解が得られている。この結果は等分布荷重を満載する四辺固定板，対辺単純支持他対辺固定板，中央点に集中荷重を受ける四辺単純支持板についても同様であった。

表・1 四辺単純支持等厚板の数値解析結果

m	Qy/qa (a/2,0)	Mxy/qa² (0,0)	Mx/qa² (a/2,a/2) Author	Mx/qa² (a/2,a/2) Kurata	W/qa⁴/Eh³ (a/2,a/2) Author	W/qa⁴/Eh³ (a/2,a/2) Kurata	W/qa⁴/Eh³ (a/2,a/2) Kubo
4	0.334	-0.0340	0.0542	0.0472	0.0450	0.0437	0.0430
8	0.336	-0.0328	0.0492	0.0479	0.0446	0.0443	0.0444
12	0.337	-0.0325	0.0484	0.0479	0.0444	0.0443	0.0446
16	0.337	-0.0325	0.0482	0.0479	0.0444	0.0443	0.0446
20	0.338	-0.0325	0.0481	0.0479	0.0444	0.0443	
N.A.S	0.338	-0.0325	0.0479		0.0443		

N.A.S : Navier s Analytical Solution

次に，一方向にのみ板厚が直線的に変化する変厚板に関して，断面力および変形量の解析を行った。その結果を図3に示す。同図より本解析法による近似解は，Conway[3]の解析解（実線）と十分な一致が認められる。なお，本解析における分割数は8である。

5．結語

以上の結果より，本解析法による数値解は一様な収束性をもつこと，また比較的粗い分割による解析においても実用上十分な精度をもつ解が得られることなどが確認された。本解法によると，荷重の分布状態や板厚，板剛度の場所的変化が不規則な場合でも，矩形板の縦横の等分割線の交点におけるこれらの諸量が与えられれば，諸量が規則的な場合と同様に解析することができる。

また，本解法は矩形板以外の任意の四辺形板の解析や平板の弾塑性解析，大変形解析などへの応用も容易で，これらについては現在数値計算続行中である。

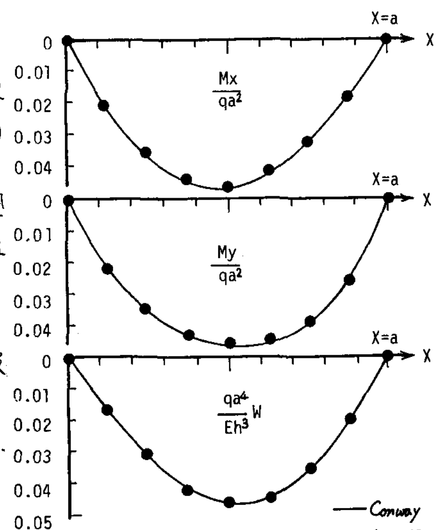

図3 変厚板の数値解析結果

（参考文献）

1) 倉田宗章・谷平勉：変厚四辺形板の曲げ解析，土木学会論文報告集，第195号，1971

2) 久保慶三郎・吉田裕：任意形状の平板曲げの数値解析法，土木学会論文報告集 第167号，1969

3) Petrina, P. and H. D. Conway : Deflection and Moment Data for Rectangular Plate of Variable Thickness . Jour. Appl. Mech. vol.39, 1972