

応力集中問題の一厳密解析法

八代高専 正員 水田洋司

八代高専 内山義博

熊本大学 学生員 山田芳嗣

1. まえがき

本研究では応力集中問題を有限要素法で解く場合に、精度の良い解を得るための一方法を提案している。応力集中部では応力勾配が急変するため、精度の良い解を得るという意味から応力集中部を他の部分より小さな要素に分割して解く方法が一般に用いられているようである。小さな要素に分割すれば、マトリックスの自由度が増え、計算に要する電子計算機の記憶容量、計算時間が増大する。特に小型の計算機ではこれらの点が問題となるであろう。また、応力集中問題では、応力集中係数、き裂の進展等のように応力集中の起こる近傍の応力状態が判ればこと足り問題が多い。このため本論文では電子計算機の記憶容量、計算精度、計算時間の問題を解決する方法として応力集中部のズーム解析法について述べ、その計算精度、計算時間の検討について報告する。

2. 解析原理

式(1)のように分割されている剛性マトリックスの逆マトリックス(撓性マトリックス)は、 $K_{11}, K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}$ が正則ならば、分割法⁽¹⁾により式(2)のように求められる。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (1) \quad K^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + VZ^{-1}Y & -VZ^{-1} \\ -Z^{-1}Y & Z^{-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{ここに、} V = K_{11}^{-1}K_{12} \quad (3) \quad Y = K_{21}K_{11}^{-1} \quad (4) \quad Z = K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12} \quad (5)$$

また、式(1)の剛性マトリックスの K_{22} に相当する部分の要素が細分割(ズーム)されると剛性マトリックスは、次式のように書き表わせる。

$$K^* = \begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + K_{ii} & K_{ij} \\ 0 & K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ズームによって、 K_{jj} のマトリックス次数に等しい次数だけ、剛性マトリックスの次数が大きくなったことになる。式(6)の撓性マトリックスは、式(2)の関係を用いて

$$f^* = \begin{bmatrix} f_{11}^* & f_{12}^* \\ f_{21}^* & f_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + V^*Z^{*-1}Y & -V^*Z^{*-1} \\ -Z^{*-1}Y^* & Z^{*-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表わせる。ここに

$$Y^* = K_{21}^*K_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{21} \\ 0 \end{bmatrix} K_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8) \quad V^* = K_{11}^{-1}K_{12}^* - K_{11}^{-1} \begin{bmatrix} K_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$Z^* = K_{22}^* - K_{21}^*K_{11}^{-1}K_{12}^* = \begin{bmatrix} K_{22} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{21} \\ 0 \end{bmatrix} K_{11}^{-1} \begin{bmatrix} K_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad (10)$$

また、式(8)、(9)の関係を用いると

$$V^*Z^{*-1}Y^* = \begin{bmatrix} V & 0 \end{bmatrix} Z^{*-1} \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} = V\bar{Z}^{*-1}Y \quad (11)$$

$$Z^{*-1}Y^* = Z^{*-1} \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{Z}^{*-1}Y \quad (12) \quad V^*Z^{*-1} = \begin{bmatrix} V & 0 \end{bmatrix} Z^{*-1} = (\bar{Z}^{*-1}Y)^T \quad (13)$$

のように縮小されたマトリックス $\bar{Z}^{*-1}$, $\bar{Z}^{*-1}$ を用いて計算できる。 $\bar{Z}^{*-1}$ はズーム前の K_{22} のマトリックス次数に

等しい縮小マトリックスであり、 $\tilde{Z}^{*-1}$ は列数が K_{22} の次数と同じで、行数はズームの新たな自由度に等しい縮小されたマトリックスである。以上の事より、ズーム後の力と変位の関係は次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} X \\ X_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + \tilde{Z}_a^{-1} \tilde{Z}_a^{-*} Y_a & -(\tilde{Z}_a^{-*} Y_a)^T \\ -\tilde{Z}_a^{-*} Y_a & \tilde{Z}_a^{-*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F_a \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここに、 X 、 F はズーム部以外の変位ベクトル、外力ベクトルであり、 X_a 、 F_a はズーム部の変位ベクトル、外力ベクトルである。ズーム部の変位 X_a は式(14)より

$$X_a = -\tilde{Z}_a^{-*} Y_a F + \tilde{Z}_a^{-*} F_a \quad (15)$$

となる。前述したように、応力集中問題では応力集中部近傍の応力状態が判れば十分な場合が多く、そのためには応力集中部近傍の変位が求められれば十分であろう。また、2回目以降のズームによるズーム部の変位も同様の考え方で式を導くことができる(図-1参照)。その結果について記すと次のようである。

$$2\text{回ズーム} \quad X_b = -\tilde{Z}_b^{-*} Y_b F - \tilde{Z}_b^{-*} Y_b F_a + \tilde{Z}_b^{-*} F_b \quad (16)$$

$$\text{ここに} \quad Y_b = \tilde{f}_{22}^{-*} \tilde{Z}_a^{-*} Y_a \quad (17)$$

$$3\text{回ズーム} \quad X_c = -\tilde{Z}_c^{-*} Y_c F - \tilde{Z}_c^{-*} Y_c F_a - \tilde{Z}_c^{-*} Y_c F_b + \tilde{Z}_c^{-*} F_c \quad (18)$$

⋮

$$n\text{回ズーム} \quad X_n = -\tilde{Z}_n^{-*} Y_n F - \tilde{Z}_n^{-*} Y_n F_a - \cdots + \tilde{Z}_n^{-*} F_n \quad (19)$$

式(15)~(19)中の添字 $a \cdots n$ は1回ズーム $\cdots n$ 回ズームを意味する。応力集中問題ではズーム部に作用する力 $F_a, F_b, \cdots, F_n$ は零である場合が多く、その時は各式の第1項の計算でズーム部の変位が求まる。

3. 数値計算およびその結果

計算例として図-2のような中央に円孔を有する平板モデルを考え、三角形要素を用いた平面応力問題として解析した。表-2は提案法でズームを進めてゆくと次第に精度が改善されるのをHawlandの厳密解をもとにして示したものである。表-3はズーム3回、5回について同じ要素分割のモデルで、提案法と直接法との計算時間の比較をした。これより提案法の解析では計算時間が短縮されるのが判る。(尚、直接法はバンド処理していない。)また提案法でズームを進めてゆくとズーム4回以降で最大応力が最小断面の円孔上の要素からずれてくる。これはメッシュの切り方、ズーム領域の取り方、計算誤差の累積等の影響によるものと考えられ今後の研究課題としたい。

(参考文献)

(1) 古屋 茂:「行列と行列式」新数学シリーズ、培風館、P61~P67

(2) 平井、水田、内山:「応力集中問題の一解析法」熊本大学工学部研究報告、第31巻第2号 S57年 9月

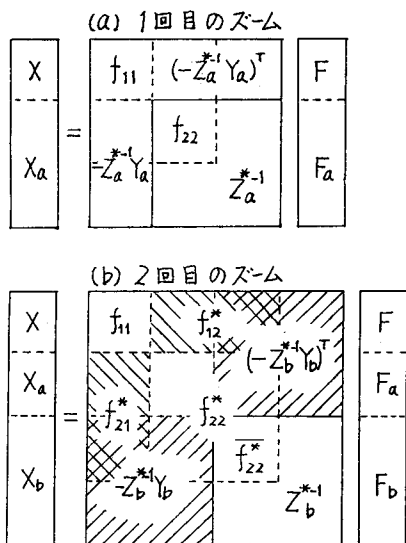


図-1 ズームによるマトリックス、ベクトルの拡大

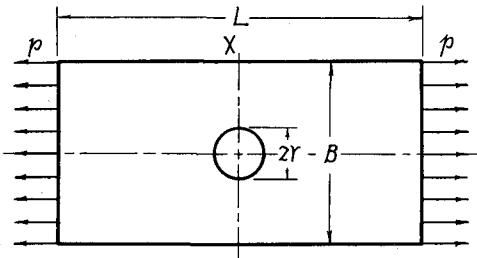


図-2 解析モデル

表-1 モデルの諸元

諸元	数値
分布荷重(P)	1 kg/mm ²
長さ(L)	40 mm
巾(B)	20 mm
板厚(t)	1 mm
円孔半径(r)	2 mm
ポアソン比(ν)	0.3
弾性係数(E)	1 kg/mm ²

表-2 (厳密解=2.51)

ズーム回数	0	1	2	3	4	5
応力集中係数	2.37	2.41	2.50	2.53	2.50	2.50
誤差(%)	-5.6	-4.0	-0.4	0.8	-0.4	-0.4

表-3

ズーム回数	要素数	CPU TIME (秒)	
		提案法	直接法
3	304	14	28
5	380	16	52