

九州大学 工学部 学生員 永田 陽一

九州大学 工学部 学生員 小山 文男

1. はじめに 前論文において、フーリエ級数展開を用いる非定常有限振幅波の数値解析法を提案し、ピストン式造波板による発生波の計算例を示した。本報告は、この方法を浮体問題に適用したもので、水中係留物体の波による運動についての計算例を示す。

2. 基本方程式 図-1に示すよ

うに、弾性索により係留され、流体中に静止している浮体の、波による運動について考える。流体は、非粘性、非圧縮の完全流体で、

重力の場で静止状態から始まる2次元運動を行うとすると、運動は速度ポテンシャルをもち、原点0を静水面、水平にx軸、鉛直上方にz軸をとり、時間をtで表わすと、連続の式、圧力pは、次式で表わされる。

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0, \quad p/p = -\Phi_t - \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) - gZ \quad \dots (1)$$

ここで、 ρ は流体密度、 g は重力加速度、サフィックスは偏微分を示す。

自由表面を $Z = \zeta(x, t)$ とすると、自由表面での運動と連続方程式は次のようになる。

$$\Phi_z = -g\zeta - \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2), \quad \zeta_t = \Phi_x - \Phi_x \zeta_x \quad \dots (2)$$

浮体表面上では、静止時の浮体重心座標を (Z_0, Z_g) 、運動中の浮体表面座標を (Z_s, Z_g) とすると、次の連続方程式が成り立つ。

$$[\Phi_x - \{\zeta_t - (Z_s - Z_g - \eta)\theta_t\}] \cos(\psi_s; x) + [\Phi_z - \{\eta_t + (Z_s - Z_g - \eta)\theta_t\}] \cos(\psi_s; z) = 0 \quad \dots (3)$$

ここで、 η , η , θ は、それぞれ、浮体の水平、鉛直、回転変位であり、 ψ_s は、浮体表面での法線ベクトルである。

水底面では、 $\Phi_b = 0$

3. 浮体の運動方程式 浮体の質量を M 、重心 (Z_g, Z_g) に次の関係がある。

関する慣性モーメントを I 、浮体に作用する流体圧力の水平と鉛直合力、および重心に関する回転モーメントを R_x , R_z , T_0 、水平と鉛直方向の係留力、および重心に

する、そのモーメントを F_x , F_z , M_0 、とすると、浮体の運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} M \ddot{x} &= R_x + F_x, & M \ddot{z} &= R_z + F_z \\ I \ddot{\theta} &= T_0 + M_0 \end{aligned} \quad \dots (4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} M &= \rho V_1 l_0^2, & I &= \rho V_2 l_0^4 \quad (V_1, V_2 \text{は定数}) \\ R_x &= \oint p dx_s, & R_z &= -\oint p dz_s \\ T_0 &= -\oint p [(x_s - x_g - \xi) dx_s + (z_s - z_g - \eta) dz_s] \quad \dots (6) \end{aligned}$$

($\oint$ は、浮体表面に沿う線積分である)

図-1に示すように、i番目の係留索について、係留点を $D(\omega_0, \omega_0)$, $E(\omega_0, \omega_0)$ 、浮体静止時の平衡状態における弾性索の長さを ω_0 、ばね定数を ωK 、初期張力を ωF_0 、係留索と水平軸のなす角度を $\omega \omega_0$ とし、浮体運動時の弾性索の長さとして水平軸のなす角度を、 $\omega \omega_0 + \omega \omega$ 、 $\omega \omega_0 + \omega \omega$ とすると、 ωF_x , ωF_z , ωM_0 は次のようになる。

$$\begin{aligned} \omega F_x &= \omega F_0 \cos \omega \omega_0 - (\omega F_0 + \omega K \cdot \omega m) \cos(\omega \omega_0 + \omega \omega) \\ \omega F_z &= \omega F_0 \sin \omega \omega_0 - (\omega F_0 + \omega K \cdot \omega m) \sin(\omega \omega_0 + \omega \omega) \\ \omega M_0 &= (\omega F_0 + \omega K \cdot \omega m) \{ [(Z_g - \omega_0) \cos \theta + (Z_g - \omega_0) \sin \theta] \\ &\quad \times \tan(\omega \omega_0 + \omega \omega) - [(Z_g - \omega_0) \sin \theta + (Z_g - \omega_0) \cos \theta] \\ &\quad \times \cos(\omega \omega_0 + \omega \omega) - \omega F_0 [(Z_g - \omega_0) \tan \omega \omega_0 - (Z_g - \omega_0) \cos \omega \omega_0] \} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

よって、係留力はこれを係留索の数とすると、次のようになる。

$$F_x = \sum_{i=1}^N \omega F_x, \quad F_z = \sum_{i=1}^N \omega F_z, \quad M_0 = \sum_{i=1}^N \omega M_0 \quad \dots (8)$$

4. グリーンの公式 流体域を囲む境界線を N^* 個の微小要素に分割し、各要素の中点を $j = (x_j, z_j)$ ($j=1 \sim N^*$)、線分の長さを ΔS_j 、外向き法線ベクトルを ν とすると、

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \left[\sum_{j=1}^{N^*} \Phi(x_j) \int_{\Delta S_j} \frac{\partial \log R}{\partial \nu} ds - \sum_{j=1}^{N^*} \Phi(x_j) \int_{\Delta S_j} \log R ds \right] \quad \dots (9)$$

ここで、 R は境界上の点 (x_i, z_i) と点 (x_j, z_j) との距離である。

5. 振動展開 無次元の微小パラメータ ε を用いて、重た一次方程式を解くことにより、各周波数における浮体の、 $\xi, \zeta, \eta, \theta, \omega_m, \omega_n$ を、 $\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}$ のように、第2次まで振動展開し、自由表面と浮体表面の条件は重ね合わせることに、静止位置に関してテラー展開を行うと、式(2), (3), (4), (5), (9)は、 ε の各べきごとに表わされる。

6. フーリエ級数展開と無次元化 流体域の大きさ、時間、水深を代表する値を、 $l_0, 1/\omega_0$ とし、 $\phi, \xi, \zeta, \eta, \theta$ が $-b_1 T \leq t \leq b_2 T$ の区間(b_1, b_2 は正の整数、 $T=2\pi/\omega_0$)でフーリエ展開できるものとし、 $x' = x/l_0, z' = z/l_0$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x, z, t) &= \frac{g l_0}{\omega_0} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n^{(1)}(x', z') e^{i n \omega_0 t} \\ \Phi^{(2)}(x, z, t) &= \frac{g l_0}{\omega_0} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n^{(2)}(x', z') e^{i n \omega_0 t} \end{aligned} \quad \text{---(10)}$$

のように、無次元化とフーリエ展開を行うと、式(2), (3), (4), (5), (9)は、ダッシュをとると、第1近似では、次式となる。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \nabla^2 \Phi_n^{(1)} &= n^2 \Gamma_n \Phi_n^{(1)} \quad (z=0) \quad \text{---(11)} \\ \Phi_n^{(1)} &= i n \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \Gamma_n \left[\alpha_1 \bar{\xi}_n^{(1)} + \alpha_2 \bar{\eta}_n^{(1)} + (\alpha_2 \bar{z} - \alpha_1 \bar{x}) n \Phi_n^{(1)} \right] \quad \text{---(12)} \\ &\quad (\text{浮体表面上}) \\ \Phi_n^{(1)} &= 0 \quad (\text{水底上}) \quad \text{---(13)} \\ n i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi_n^{(1)} - \beta_1 \bar{\xi}_n^{(1)} - x \bar{\eta}_n^{(1)} - x \bar{\eta}_n^{(1)} - x \bar{\eta}_n^{(1)} &= 0 \quad \text{---(14)} \\ -n i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi_n^{(1)} - \beta_2 \bar{\xi}_n^{(1)} - \beta_2 \bar{\eta}_n^{(1)} - x \bar{\eta}_n^{(1)} &= 0 \quad \text{---(15)} \\ n i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi_n^{(1)} (\bar{x} dx + \bar{z} dz) + \beta_1 \bar{\xi}_n^{(1)} + \beta_2 \bar{\eta}_n^{(1)} + \beta_2 \bar{\eta}_n^{(1)} &= 0 \quad \text{---(16)} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_n \Phi_n^{(1)} - E_n \Phi_n^{(1)}] &= 0, \quad \Gamma_n = \frac{\omega_0^2}{g}, \quad \frac{\omega_0^2}{g} = \frac{1}{b_1 + b_2} \quad \text{---(17)} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha_1 = dz/ds, \alpha_2 = -dx/ds, \bar{x} = x_0 - x_g, \bar{z} = z_0 - z_g$ 、 $\beta_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{z_n^2}{g l_0} + n^2 \Gamma_n, x \bar{\eta}_n^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{x_n^2}{g l_0}$ などである。また、 S_4 境界では次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(1)} &= K_n \frac{\cosh \lambda_n (z+l_0)}{\cosh \lambda_n l_0}, \quad \lambda_n = K_n l_0 \\ \Phi_n^{(2)} &= -i \lambda_n K_n \frac{\cosh \lambda_n (z+l_0)}{\cosh \lambda_n l_0}, \quad n \Gamma_n = \lambda_n \tanh \lambda_n \end{aligned} \quad \text{---(18)}$$

7. 適用計算例 一定水深 l_0 の流体域の S_4 境界で次のような流速が与えられる場合を考える。

$$\begin{cases} t \leq 0 \text{ のとき, } \bar{x}_x = 0 \\ t \geq 0 \text{ のとき, } \bar{x}_x = \frac{g l_0}{\omega_0} \left[\frac{\cosh \lambda (z+l_0)}{\cosh \lambda l_0} \sin \omega t + \frac{\lambda \cosh \lambda (z+l_0)}{4 \sinh \lambda l_0} \sin 2 \omega t \right] \end{cases}$$

K : 波数, ζ_0 : 入射波振幅

第1近似に関する計算法を示すと、まず式(17)の第1項を

フーリエ級数展開し、各周波数ごとの境界条件式(11), (12), (13), (18), (19)を式(17)に代入し、運動方程式を含めた、連立一次方程式を解くことにより、各周波数における浮体の運動振幅を求めることができ、それらを、式(10)の形に重ね合わせることに、過渡状態の浮体の運動を求めることができる。第2近似に対し7も同様に求めることができる。

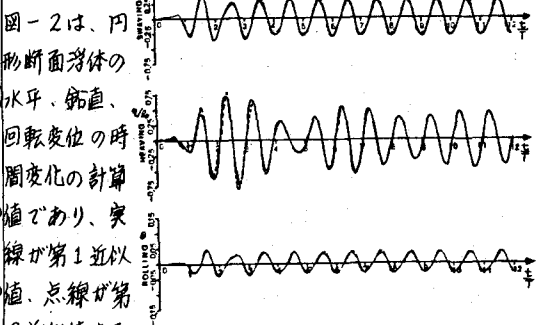


図-2

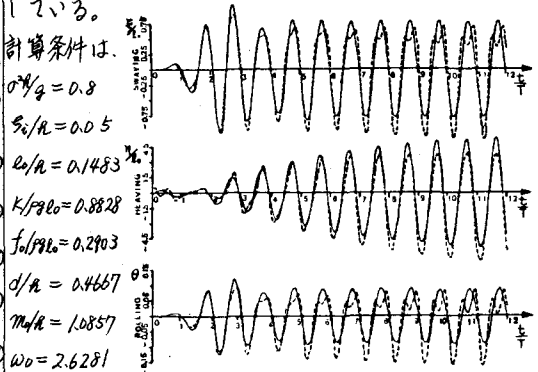


図-3

計算条件は、 $\sigma^2/g = 0.8, \xi_0/l_0 = 0.05, l_0/l_0 = 0.1483, K/g l_0 = 0.8828, f_0/g l_0 = 0.2903, d/l_0 = 0.4667, m/l_0 = 1.0857, \omega_0 = 2.6281, a_0/l_0 = 0.1483, b_0/l_0 = -0.4667, v_1 = 0.7476, v_2 = 0.3734, b_1 = 16, b_2 = 12, (f_0 = F_0/m_0) n^2 = 2$ であり、弾性索は対称に係留したものである。この場合は、入射波振幅が小さく、非線型性は弱い。図-3は、 $\sigma^2/g = 1.2, \xi_0/l_0 = 0.88$ とし、他の条件は同じものであるが、非線型性が強く出ている。両図は、円形断面浮体を弾性索により対称に係留したために、水平変位と回転変位は同位相である。

8. あとがき 没水係留浮体の波による非定常運動と第2近似まで求めた。ここでは、実験値との比較が行なわれていないが、これは今後の課題としたい。

参考文献

井島武・永田修一：水中物体の非定常および定常有限振幅運動の解析 1981年、第28回 海洋工学講演会論文集 P446~420