413—⑪　　流れ方向の拡散を含んだ移流分散モデル

大分工業高等専門学校　正会員　島田　晋

§1. まえがき　河川の上流で放流された汚水（トレーサー）は、河川断面内で乱流拡散作用によって広がり、流速の大きな主流部分では、流れ方向にすみやかに移流される。しかしながら、河床や河岸に近い流速の小さな所では、汚水が停滞する。したがって河川全体を見渡すと、流れ方向に汚水が伸長効果を受けることになる。そして更に河川断面内の混合作用により、流速の小さな所へ汚水がひろがり、次第に濃度は低くなり、稀釈されることになる。これがいわゆる移流分散現象の概要であるが、筆者はこれまで移流分散過程（流れ方向の断面平均濃度分布の経時変化）の解析を行ない、流れ方向の濃度分布と断面内の流速分布との関連を明らかにし[1]、二次元開水路乱流について、流速分布が対数分布のとき、流れ方向の濃度分布がガンマ分布で表わされることを示した[2]。この報告では、これまで考慮されていなかった流れ方向の乱流拡散が、移流分散過程にどの程度の寄与をしているかを明らかにしようとしたものである。解析方法としては濃度分布から導かれる、流れ方向についての積率（モーメント）母関数[3]を基礎に、1次～4次のモーメントおよびキュムラント[3]を求めることにより、流れ方向の拡散の影響を調べた。

§2. 一般の場合の解析　Fig.1. に示すような二次元開水路を考え、流れ方向を x 軸とし、y 軸を水路底から水表面へ向ってとれば、流速 u と乱流拡散係数 ε は y の関数として与えられる。$x=0$ に仮想面源として集中的に投入された物質が、ある相関時間 T だけの間は、断面内（水深方向）の混合が起こらず、流れ方向の移流と拡散のみが行なわれたとすると、平均の移流拡散距離が uT、分散が $2\varepsilon T$ となり、濃度分布 $c(x,y,T)$ が (1) のように与えられる。流れ方向のモーメントで議論をすすめるため、積率母関数 $H(\theta,y)$ を導入する (2)。これの断面平均を $M(\theta,T)$ とおき (3)、一般の時間 t における濃度分布の断面平均を $C(x,t)$ で表わす (4)。断面平均濃度を確率密度とする x に関する積率母関数を $M(\theta,t)$ で示す (5)。一般の時間 t と相関時間 T におけるキュムラント母関数（積率母関数の対数）の関係は (6) で表現される。このことは、T だけの間流れ方向の移流と拡散が起こった後に、断面内混合が行なわれるという現象が、繰り返し生起することを意味している。移流と拡散の結果 (1) で示される濃度分布の等濃度線が1000倍毎に Fig.1. に描いてある。(1) を流れ方向の積率母関数で表わすと (7) になり、これの断面平均が (8) である。ここに L は T 時間後の移流拡散距離を示し、(7) と (8) の θ^n の係数を比較して、(9)～(12) には L の1次～4次モーメントを u と ε の2変数モーメントの関数として求めてある。(13) はキュムラント母関数とキュムラントとの関係を示しており、以下、モーメントよりも物理的意味がはっきりしている

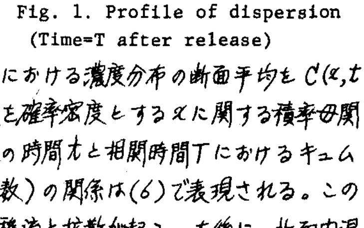

Fig. 1. Profile of dispersion
(Time=T after release)

(1) $$c(x,y,T)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon T}}\exp\left\{-\frac{(x-uT)^2}{4\varepsilon T}\right\}$$

(2) $$H(\theta,y)=\int_{-\infty}^{\infty}c(x,y,T)\exp(\theta x)\,dx$$

(3) $$M(\theta,T)=\langle H(\theta,y)\rangle$$

(4) $$C(x,t)=\langle c(x,y,t)\rangle$$

(5) $$M(\theta,t)=\int_{-\infty}^{\infty}C(x,t)\exp(\theta x)\,dx$$

(6) $$\ln\{M(\theta,t)\}=(t/T)\cdot\ln\{M(\theta,T)\}$$

(7) $$H(\theta,y)=\exp(uT\theta+\varepsilon T\theta^2)=\sum(uT\theta+\varepsilon T\theta^2)^n/n!$$

(8) $$M(\theta,T)=\sum\langle L^n\rangle\theta^n/n!$$

(9) $$\langle L\rangle=\langle u\rangle\cdot T$$

(10) $$\langle L^2\rangle=2\langle\varepsilon\rangle T+\langle u^2\rangle T^2$$

(11) $$\langle L^3\rangle=6\langle u\varepsilon\rangle T^2+\langle u^3\rangle T^3$$

(12) $$\langle L^4\rangle=12\langle\varepsilon^2\rangle T^2+12\langle u^2\varepsilon\rangle T^3+\langle u^4\rangle T^4$$

(13) $$\ln\{M(\theta,T)\}=\sum\langle L^n\rangle_c\theta^n/n!$$

(14) $$\langle L\rangle_c=\langle L\rangle=\langle u\rangle\cdot T$$

(15) $$\langle L^2\rangle_c=\langle L^2\rangle-\langle L\rangle^2=2\langle\varepsilon\rangle T+\langle u^2\rangle_c T^2$$

(16) $$\langle L^3\rangle_c=\langle L^3\rangle-3\langle L^2\rangle\langle L\rangle+2\langle L\rangle^3=6\langle u\varepsilon\rangle_c T^2+\langle u^3\rangle_c T^3$$

(17) $$\langle L^4\rangle_c=\langle L^4\rangle-4\langle L^3\rangle\langle L\rangle-3\langle L^2\rangle^2+12\langle L^2\rangle\langle L\rangle^2-6\langle L\rangle^4=12\langle\varepsilon^2\rangle_c T^2+12\langle u^2\varepsilon\rangle_c T^3+\langle u^4\rangle_c T^4$$

$\langle @\rangle \equiv$ cross-sectional average
$\langle \chi^n\rangle \equiv$ n-th moment
$\langle \chi^n\rangle_c \equiv$ n-th cumulant

$$(18)\quad D = hU_* \cdot 0.4041/\kappa^3$$

$$(19)\quad u = U_0 + (U_*/\kappa)\cdot \ln(y/h)$$

$$(20)\quad F(u) = \frac{y}{h} = \exp\left(-\frac{U_0-u}{U_*/\kappa}\right)$$

$$(21)\quad f(u) = \frac{1}{h}\frac{dy}{du} = \frac{\kappa}{U_*}\exp\left(-\frac{U_0-u}{U_*/\kappa}\right)$$

$$(22)\quad Q(\omega) = \langle \exp(\omega u)\rangle = \frac{\exp(U_0\omega)}{1+U_*\omega/\kappa}$$

$$(23)\quad \ln\{Q(\omega)\} = U_0\omega + \sum(-U_*\omega/\kappa)^n/n$$

$$(24)\quad \langle u\rangle = U_0 - U_*/\kappa$$

$$(25)\quad \langle u^2\rangle_c = (U_*/\kappa)^2$$

$$(26)\quad \langle u^3\rangle_c = -2(U_*/\kappa)^3$$

$$(27)\quad \langle u^4\rangle_c = 6(U_*/\kappa)^4$$

$$(28)\quad \varepsilon = \kappa h U_* \cdot \frac{y}{h}\cdot\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

$$(29)\quad \langle\varepsilon\rangle = \kappa h U_*/6$$

$$(30)\quad \langle\varepsilon^2\rangle = (\kappa h U_*)^2/30$$

$$(31)\quad \langle\varepsilon^2\rangle_c = (\kappa h U_*)^2/180$$

$$(32)\quad \langle u\varepsilon\rangle_c = \langle u\varepsilon\rangle - \langle u\rangle\langle\varepsilon\rangle = hU_*^2/36$$

$$(33)\quad \langle u^2\varepsilon\rangle_c = \langle (u-\langle u\rangle)^2(\varepsilon-\langle\varepsilon\rangle)\rangle = -(hU_*^3/\kappa)\cdot(11/108)$$

$$(34)\quad T = \frac{2\cdot D}{\langle u^2\rangle_c} = \frac{0.8082}{\kappa}\cdot\frac{h}{U_*}$$

$$(35)\quad B = (U_*/\kappa)T = h\cdot 0.8082/\kappa^2$$

$$(36)\quad \langle L\rangle_c = \langle L\rangle = (\kappa U_0/U_* - 1)\cdot B$$

$$(37)\quad \langle L^2\rangle_c = (\kappa^4/2.4246 + 1)\cdot B^2$$

$$(38)\quad \langle L^3\rangle_c = (\kappa^4/9.6984 - 1)\cdot 2\cdot B^3$$

$$(39)\quad \langle L^4\rangle_c = \left(\frac{\kappa^8}{58.787} - \frac{\kappa^4}{3.9675} + 1\right)\cdot 6\cdot B^4$$

キュムラントを1次から4次まで(14)～(17)に求めてある。また(9)～(12)と(14)～(17)は同型の式となっており、モーメントとキュムラントの記号を書き変えれば全く同じである。そして一般の時間tにおけるキュムラントはLのキュムラントを(t/T)倍することにより得られる。

§3. 二次元開水路乱流の計算結果

無限幅二次元開水路乱流について、J.W.Elder[4]は(18)のように移流分散係数Dを求めている。ここにhは水深、U_*はマサツ速度、κはカルマン常数（約0.4）である。流速分布として対数分布を用いれば、水表面における流速をU_0として、流速uは(19)で表わされる。したがって流速の累積分布関数$F(u)$と確率密度$f(u)$が(20)・(21)のように得られる。これは$u \leq U_0$の範囲に値がある指数分布を示している。流速に関する積率母関数$Q(\omega)$とその対数であるキュムラント母関数は(22)・(23)のようである。また流速についての1次～4次のキュムラントが(24)～(27)のように求められる。(25)と(26)からゆがみ$S=-2$、(25)と(27)から超過$E=6$となる。次に流れ方向の乱流拡散係数εが、レイノルズの相似則から求められる断面内（水深方向）の拡散係数に等しいと仮定すると、εは放物線分布(28)で表わされる。εの1次と2次のモーメントが(29)・(30)のようになり、2次のキュムラント（分散）が(31)となる。そして流速と拡散係数の2変数キュムラントが(32)・(33)のように求められ、(32)は共分散である。ここでJ.W.Elderの計算結果Dと流速の分散から、相関時間Tを求めると(34)になる。次からの計算が便利なように、流速のみによる移流距離の標準偏差Bを(35)のように定める。以上の結果から前節の(14)～(17)に示してある移流拡散距離Lの1次～4次のキュムラントが(36)～(39)のように計算される。括弧でくくられた係数の部分が移流のみによる結果との比を示し、分散(37)、3次キュムラント(38)、4次キュムラントにおける流れ方向の拡散の寄与は数パーセント以下であり、非常に小さいことが示された。

§4. むすび

この報告で述べたことをまとめると次の通りである。流れ方向の乱流拡散を考慮して、流れ方向についての積率母関数を基礎にして、移流分散過程の解析を行なった。相関時間T後の濃度分布を(1)のように正規分布で仮定し、その断面平均を考えることにより、1次～4次のモーメントとキュムラントを流速と拡散係数の2変数モーメントおよびキュムラントで表わした。J.W.Elderの解析にならって、流速分布として対数分布(19)、拡散係数として放物線分布(28)を仮定して、uとεの2変数キュムラントを計算し、二次元開水路乱流について、T時間後の移流拡散距離Lの1次～4次のキュムラントが求められた。この結果、流れ方向の拡散の寄与が非常に小さいことが確認され、移流分散過程には断面内の流速分布が大きく関与していることが示された。

参考文献
1) 島田 晋(1980) 移流分散現象の確率論的解析，第24回水理講演会論文集 pp1～6.
2) 島田 晋(1980) 二次元開水路における移流分散過程の解析，昭和54年度土木学会西部支部研究発表会講演集 pp179～180.
3) 小倉久直(1978) 2.特性関数・モーメント母関数・キュムラント，「確率過程論」，コロナ社，pp16～23.
4) J.W.Elder(1959) The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Sear Flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol.5, pp544～560.