

九州大学工学部 学生員 〇遊 有三

九州大学大学院 学生員 平野 文昭

九州大学工学部 正会員 神野 健二

1. まえがき 地下水流動の広域的なシミュレーションを行う場合、流れ場の支配因子である透水係数、貯留係数などの滞水層の水文地質パラメータは、解析対象地域内での揚水試験及び地質データから評価し確定的に入力される事が多いが、出力としての地下水頭には入力データの正確さを反映して必ずしも高い精度を期待できないのが現状であろう。この入力データの中で滞水層の水文地質パラメータの推定は、地下水頭分布の算定や揚水計画を算定する上で、この精度を左右する重要な作業であると考ええる。従来、滞水層の水文地質パラメータの推定に関する研究は、*geostatistics*の立場から透水係数の対数変換値の空間的な変動特性を統計的に解析するもので、定常状態で解析された地下水頭の計算値とその観測値との残差の平方和を評価関数とし、これを最小にして透水係数を算定するもの等が行なわれている。本報では、一次元地下水流れ場において、*geostatistics*な面から透水性係数の構造式を仮定し、カルマンフィルタ理論を用いて地下水頭の非定常変動のもとで、透水係数の推定を行い検討したものである。

2. 実験について 実験は図-1に示す内径5cm、長さ120cmの塩化ビニール樹脂製の円管を用い、20cm毎6つのブロックに分割し、それぞれのブロックに粒径の異なるガラスビーズを袋に詰め、右側のヘッドタンクの水位を一定に保ち左側のヘッドタンクの水位を上下変動させ非定常状態の管内部の水位変化を測定した。

実験装置略図

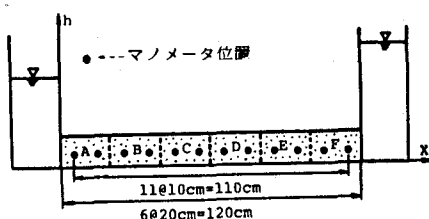


図-1

3. 透水係数の構造式 透水係数の構造式を求めるために $\ln k(x)$ ($k(x)$ は透水係数を表わす) の一次回帰式をつくり残差の自己相関係数を求めると図-2のようになる。この

とき $R(\xi)$ は自己相関係数である。Fruege 等の方法により自己相関係数の分布特性から透水係数の分布式について考えてみよう。いま、分布式が $\frac{d}{d\xi} \ln k(x) + E(x) = 0$ (E は雑音) ——(1) を満たすと仮定すると $(x+\xi)$ 点においても次式が成立立つ。すなわち、 $\frac{d}{d\xi} \ln k(x+\xi) + E(x+\xi) = \frac{d}{d\xi} \ln k(x) + E(x) = 0$ ——(2) 式(2)の両辺に $\ln k(x)$ をかけて平均値をとれば、 $\frac{d}{d\xi} \ln k(x) \cdot \ln k(x+\xi) + E(x+\xi) \cdot \ln k(x) = 0$ ——(3) となる。ここで、 $\ln k(x) \cdot \ln k(x+\xi) = C(\xi)$ ($C(\xi)$ は自己相関関数) とおき、また雑音 $E(x+\xi)$ と $\ln k(x)$ が互いに無相関であるとする $E(x+\xi) \cdot \ln k(x) = 0$ 、したがって式(3)は $\frac{d}{d\xi} C(\xi) + 0 = 0$ となる。 $C(\xi)$ を低次元 $R(\xi)$ を用いて書きかえ $R(\xi) = \alpha\xi + \beta$ (α, β は係数) となる。よって $R(\xi)$ は ξ の一次式を表わす。この実験において図-2より $R(\xi)$ を ξ の一次式で近似できると仮定すると $\ln k(x)$ の分布式は式(1)においてもよいものと考ええる。

4. カルマンフィルタを用いたパラメータ推定問題への定式化

(i). 水頭分布の基礎式 水平一次元領域における非定常地下水流動に関する方程式は、連続の式とダルシー則より $S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial h}{\partial x}) - \sum Q_n \delta(x-x_n)$ ——(4) ここで S_0 はデルタ関数、 h は水頭、 S_0 は比貯留係数、 Q_n は揚水量、 k_x は x 方向の透水係数である。式(4)に対応する汎関数は、 $\mathcal{H} = \int_0^L k_x (\frac{\partial h}{\partial x})^2 dx + \int_0^L S_0 (h-x_0) \cdot h dx + \int_0^L \frac{1}{2} Q_n h dx$ ——(5) である。いま式(5)を有限要素法で離散化するためにマトリックス表示すると $[C][H] = -[T][H] - [Q]$ ($\cdot$ 印は時間微分を示す) ——(6) さらに地下水頭 h を分割して h_1 を領域内任意節点、 h_2 を境界節点に対応する地下水頭とす

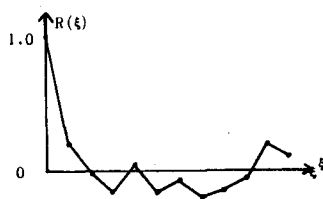


図-2 自己相関係数

$$\text{れば式(6)は} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} C_{11}h_1 + C_{12}h_2 = -(T_{11}h_1 + T_{12}h_2) - Q_1 \\ C_{21}h_1 + C_{22}h_2 = -(T_{21}h_1 + T_{22}h_2) - Q_2 \end{cases} \quad (7) \quad \text{となる。}$$

h_1 及び h_2 を境界条件として与え式(7)の第一式のみを考える。この方程式を離散数式で表すために時間について、implicit法により差分化すると次のようになる。 $h_1(v+1) = E_1 h_1(v) + E_2 + E_3$ ——(8) ここで、 $E_1 = (C_{11} + \Delta t T_{11})^{-1} \cdot C_{11}$, $E_2 = -(C_{11} + \Delta t T_{11})^{-1} \cdot \{C_{12} \cdot (h_2(v+1) - h_2(v)) + \Delta t T_{12} h_2(v+1)\}$, $E_3 = -(C_{11} + \Delta t T_{11})^{-1} \cdot \Delta t \cdot Q_1$ なお Δt は時間ステップ数、 Δt は時間さみ、上付き-1は逆行列を示す。(ii). 透水係数の基礎式 3で述べたようにここで透水係数の基礎式を $\frac{\partial}{\partial x} (h_1 k(x)) = A \cdot \frac{\partial}{\partial x} (h_2 k(x)) + E(x) = 0$ (A は係数) ——(9)としてみよう。ここで雑音は離散化の後に加えるとし、式(9)の雑音項をはずして汎関数を求めると $X(k) = \int_{-1/2}^{1/2} A \left(\frac{2\pi}{\Delta x}\right)^2 dx + \int_{-1/2}^{1/2} E \cdot dx$ ——(10) 次に式(9)を求めたのと同様の操作を行ない、透水係数の境界条件として観測点の透水係数値から得られるトレンドを境界節点上に一定値として与えると透水係数に関する状態方程式は、 $C_{T11}k_1 + C_{T12}k_2 = -(T_{T11}k_1 + T_{T12}k_2)$ ——(11) によって、 $k_1(v+1) = E_{T1} k_1(v) + E_{T2}$ ——(12) となる。ここに、 $E_{T1} = (C_{T11} + \Delta t T_{T11})^{-1} \cdot C_{T11}$, $E_{T2} = -(C_{T11} + \Delta t T_{T11})^{-1} \cdot \Delta t \cdot T_{T12} \cdot k_2(v+1)$ である。(iii). カルマンフィルター 式(8), 式(12)よりシステム系を表す状態方程式は、システム雑音を加えると $\begin{bmatrix} x(v+1) \\ k(v+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(v+1) \\ k_1(v+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 h_1(v) + E_2 + E_3 \\ E_{T1} k_1(v) + E_{T2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ ——(13) となる。ここに、 w_1, w_2 は平均値

0, 分散 σ_1^2, σ_2^2 の正規白色雑音である。カルマンフィルター理論においては、観測点の個数は推定すべき節点の個数より少なくなくてよく、観測系を表す観測方程式は其のパラメータ値に平均値0, 分散 σ_1^2, σ_2^2 の正規白色雑音 v_1, v_2 を加えて次式のように示される。 $\begin{bmatrix} y(v+1) \\ z(v+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(v+1) \\ N(v+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(v+1) \\ k(v+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ ——(14) (M は観測行列である)

$(v+1)$ ステップまで観測した後での $x(v+1)$ の最適推定値は、 $\hat{x}(v+1|v+1) = \hat{x}(v+1|v) + A(v+1) [\mathcal{Y}(v+1) - M(v+1) \hat{x}(v+1|v)]$ ——(15) ここに、 A はカルマンゲイン行列であり、また、 $A(v+1) = P(v+1|v) M^T(v+1) [M(v+1) P(v+1|v) M^T(v+1) + R(v+1)]^{-1}$ ——(16) である。また、 P は推定誤差共分散行列、 R は観測雑音行列であり、 $P(v+1|v) = E [\hat{x}(v+1|v) \hat{x}^T(v+1|v)]$, $P(v+1|v+1) = [I - A(v+1) M(v+1)] P(v+1|v)$ である。ここに、 I は単位行列、上付き T は転置行列、 $\hat{x}(v+1|v)$ は v ステップまでの情報による $v+1$ ステップでの x の最適推定値、 $\hat{x}(v+1|v) = x(v+1) - \hat{x}(v+1|v)$

5. 計算例 水頭の観測点を6つ、透水係数の観測点を4つにとり、システム雑音には $w_1 = 0.01$, w_2 は観測値より得られる不偏分散(0.11)を与え、また観測雑音にはシステム雑音の左を与えた。図-3に推定誤差共分散行列のトレース、図-4に透水係数の最終推定値を示した。また水頭の観測値が透水係数の推定に及ぼす影響を見るため、推定における重みであるカルマンゲインの中で関係する部分の平均的オーダーを Z_1 , 透水係数の推定で水頭の観測値が影響を及ぼさないカルマンゲインの部分の平均的オーダーを Z_2 として、図-5に時間的変化を示した。

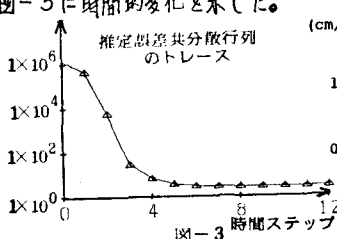


図-3 時間ステップ

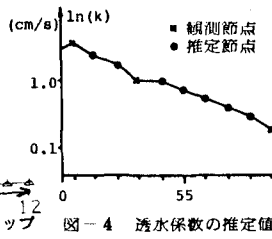


図-4 透水係数の推定値

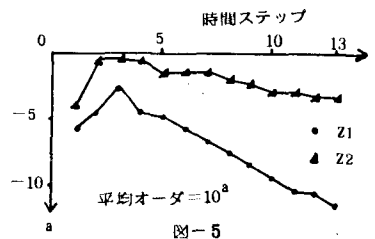


図-5

6. 結び 図-5より分るように水頭変化の透水係数に与える影響は大変小さく、図-4で示すように透水係数の推定値はオーダーで見ると限りは回帰式に乗ると言える。これはカルマンフィルターが最小自乗法理論から成るためであらう。よって水頭から透水係数を推定するのは無理があるようで、透水係数の推定には現状として多くの観測点を得る事が難しい以上、geostatisticsの面からのアプローチがやはり望ましいと思われる。

参考文献 日野幹雄: Kalmanの予測推定理論の平易な誘導について, 東工大土木工学科研究報告 No. 15, 1973

Delhomme, J.P.: Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters, W.R.R. 15(2), April, 1979