403—㉑　　カルマンフィルターによる揚水試験の解析法に関する研究

九州大学大学院　学生員　○平野文昭
九州大学工学部　正会員　神野健二
九州大学工学部　正会員　上田年比古

1. まえがき

地下水流動のシュミレーションを行なう際，滞水層を支配するパラメータである貯溜係数，透水係数は，全領域について予め入力データとして得られねばならない。現在これらのデータは，地質調査，透水試験，揚水試験等によって算出されるが，それらには数多くの不確定要素が含まれ必ずしも精度の高いデータが得られないようである。従来，不確定性要素を白色性の雑音として確率論的に滞水層パラメータを推定する研究が行なわれている。その中で，線形ダイナミカルシステムの状態変数が直接測定できないとき，雑音で汚された出力の値からそれを推定する機構であるカルマンフィルター理論を用いて，非定常過程のもとで滞水層パラメータを推定するS.Chanderらの研究[1]がある。これは観測方程式にタイスの解を用いて解析しているが，井戸理論を用いるタイスの解については，その適用領域に限度があり境界が川の近傍に位置したり地質が領域内で変化している場合には満足のいくパラメータ値が得られないようである。本報では，カルマンフィルター理論を用いて，複雑な領域についても適用できるように，観測方程式に連続の式とダルシー則とから得られる地下水頭の基礎式を用いて貯溜係数と透水係数を推定する計算方法を提示したものである。

2. パラメータ推定問題へのカルマンフィルター理論による定式化

(1). 基礎式

水平2次元領域における非定常地下水流動に関する方程式は，連続の式とダルシー則から

$S\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}T_x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}T_y\frac{\partial h}{\partial y}-\sum_m Q_m\cdot\delta(x-x_m)\cdot\delta(y-y_m)-R(x,y)$ ——(1)　ここに，Sは貯溜係数，T_x, T_yはそれぞれx方向，y方向の透水量係数，hは地下水頭，x_m, y_mは井戸mのx, y座標，Q_mはその揚水量，δはデルタ関数，$R(x,y)$は滞水層の単位面積，単位時間あたりの流出入量で外部への流出量を＋とする。式(1)に対応する汎関数は　$\chi(h)=\iint\frac{1}{2}\left\{T_x\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+T_y\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+\iint\sum_m Q_m\cdot\delta(x-x_m)\cdot\delta(y-y_m)\cdot h\cdot dx\,dy+\iint R(x,y)\cdot h\,dx\,dy+\iint S\frac{\partial h}{\partial t}\cdot h\cdot dx\,dy$ ——(2)　いま，三角形要素e内でhの1次分布を仮定し，hを各節点のh_iと節点座標で表わして，式(2)のhに代入して後，h_iについての変分$\partial\chi(h)/\partial h_i$をとり0とおけば，節点の地下水頭$h_i$を未知数とする連立方程式が得られる。これをマトリックス表示すると　$\mathbb{C}\dot{\boldsymbol{h}}+\mathbb{K}\boldsymbol{h}+\mathbb{Q}+\mathbb{R}=\mathbb{O}$（・印は時間微分を示す）——(3)　ここに，$\mathbb{C}$は貯溜係数と節点座標からなる係数行列，$\mathbb{K}$は透水量係数と節点座標からなる係数行列，$\boldsymbol{h}$は節点の地下水頭ベクトル，$\mathbb{Q}$は井戸の揚水量ベクトル，$\mathbb{R}$は涌水量ベクトルである。式(2), (3)において，貯溜係数，透水量係数とも全領域で一定とし，$R=0$とすれば，$\frac{T}{S}=\alpha$, $\frac{1}{S}=\beta$を用いて次式を得る。

$\mathbb{C}_n\dot{\boldsymbol{h}}+\alpha\mathbb{K}_n\boldsymbol{h}+\beta\mathbb{Q}=\mathbb{O}$ ——(4)　さらに，地下水頭$\boldsymbol{h}$を分割して$\boldsymbol{h}_1$を揚水井節点，$\boldsymbol{h}_2$を領域内任意節点，$\boldsymbol{h}_3$を境界節点に対応する地下水頭とすれば，式(4)は次のような小行列に分割できる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{n11} & \mathbb{C}_{n12}\\ \mathbb{C}_{n21} & \mathbb{C}_{n22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{h}}_1\\ \dot{\boldsymbol{h}}_2\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{n11} & \mathbb{K}_{n12}\\ \mathbb{K}_{n21} & \mathbb{K}_{n22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_1\\ \boldsymbol{h}_2\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{n13}\boldsymbol{h}_3\\ \mathbb{K}_{n23}\boldsymbol{h}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{n13}\dot{\boldsymbol{h}}_3\\ \mathbb{C}_{n23}\dot{\boldsymbol{h}}_3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\mathbb{Q}_1\\ \mathbb{Q}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{——(5)}$$

式(5)を時間について陽解法により差分化しα, βについて整理すると

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_1^{\nu+1}\\ \boldsymbol{h}_2^{\nu+1}\end{bmatrix}=-\Delta t\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{n11} & \mathbb{C}_{n12}\\ \mathbb{C}_{n21} & \mathbb{C}_{n22}\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{n11} & \mathbb{K}_{n12}\\ \mathbb{K}_{n21} & \mathbb{K}_{n22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_1^{\nu}\\ \boldsymbol{h}_2^{\nu}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{n13}\boldsymbol{h}_3\\ \mathbb{K}_{n23}\boldsymbol{h}_3\end{bmatrix}\right\}\alpha-\Delta t\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{n11} & \mathbb{C}_{n12}\\ \mathbb{C}_{n21} & \mathbb{C}_{n22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbb{Q}_1\\ \mathbb{Q}_2\end{bmatrix}\beta$$
$$-\Delta t\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{n11} & \mathbb{C}_{n12}\\ \mathbb{C}_{n21} & \mathbb{C}_{n22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{n13}\dot{\boldsymbol{h}}_3\\ \mathbb{C}_{n23}\dot{\boldsymbol{h}}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_1^{\nu}\\ \boldsymbol{h}_2^{\nu}\end{bmatrix} \quad \text{——(6)}$$

ここに，上付き−1は逆行列，νは時間ステップを示す。

(2). カルマンフィルター理論

カルマンフィルター理論は，線形システム理論における最小２乗法の考えにもとづいており，時系列解析に効力を発揮することが知られている。よって，ここでは揚水試験により得られる非定常過程時の水位低下量を観測量として，式(6)に示すようなこれに線形なパラメータα，βを推定する問題（つまり雑音を含む観測値と推定値との平均２乗誤差を最小にするような推定値を得る問題）について考える。システムの状態量α，βを時間について変わらないとすると状態方程式は，

$$x(\nu+1)=\begin{bmatrix}\alpha(\nu+1)\\ \beta(\nu+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha(\nu)\\ \beta(\nu)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_\alpha(\nu)\\ w_\beta(\nu)\end{bmatrix} \quad \text{———(7)}$$

ここに，w_α，w_βはシステム雑音，νは時間ステップである。

また，観測方程式を非定常流動に関する基礎式としαとβの関数である式(6)のh_1に関する差分式により表わすと

$$y(\nu+1)=[M_1\ M_2]\begin{bmatrix}\alpha(\nu)\\ \beta(\nu)\end{bmatrix}+y(\nu)+v(\nu) \quad \text{———(8)}$$

ここに，M_1は式(6)の右辺第１項αにかかるベクトルの第１行成分，M_2は式(6)の右辺第２項βにかかるベクトルの第１行成分，vは観測雑音である。カルマンフィルター理論の誘導は数多くの文献[2)~4)]に示されているが，以下それらに従って適用する式を簡単に述べる。用いる記号を要約すると次のようである。$\hat{x}(\nu+1|\nu)$：νステップまでの情報を利用して求められた$(\nu+1)$ステップでのxの最適推定値。$\hat{x}(\nu+1|\nu+1)$：$(\nu+1)$ステップまでの情報を利用して求められたその時間ステップでのxの最適推定値。$\tilde{x}(\nu+1|\nu)=x(\nu+1)-\hat{x}(\nu+1|\nu)$：$\nu$ステップまでの情報により$(\nu+1)$ステップでの$x$を推定した場合の誤差。$\tilde{x}(\nu+1|\nu+1)=x(\nu+1)-\hat{x}(\nu+1|\nu+1)$：$(\nu+1)$ステップまでの情報によりその時間ステップでの$x$を推定した場合の誤差。$y(\nu)$：$\nu$ステップでの観測量。$\mathbb{I}$：単位行列。$\mathbb{A}$：カルマンゲイン。$\mathbb{M}=[M_1\ M_2]$：観測係数。$\mathbb{Q}_\alpha$，$\mathbb{Q}_\beta$：システム雑音行列。$\mathbb{R}$：観測雑音行列。

推定誤差$\tilde{x}(\nu+1|\nu)$の共分散行列は，

$$\mathbb{P}(\nu+1|\nu)=E[\tilde{x}(\nu+1|\nu)\,\tilde{x}'(\nu+1|\nu)]=\begin{bmatrix}P_\alpha(\nu+1|\nu) & P_{\alpha\beta}(\nu+1|\nu)\\ P'_{\alpha\beta}(\nu+1|\nu) & P_\beta(\nu+1|\nu)\end{bmatrix} \quad \text{———(9)}$$

ここに，$P_\alpha(\nu+1|\nu)=P_\alpha(\nu|\nu)+Q_\alpha$，$P_\beta(\nu+1|\nu)=P_\beta(\nu|\nu)+Q_\beta$，$P_{\alpha\beta}(\nu+1|\nu)=P_{\alpha\beta}(\nu|\nu)$，上付き ′ は転置を示す。

カルマンゲインは，$\mathbb{A}(\nu+1)=\mathbb{P}(\nu+1|\nu)\mathbb{M}'(\nu+1)[\mathbb{M}(\nu+1)\mathbb{P}(\nu+1|\nu)\mathbb{M}'(\nu+1)+\mathbb{R}(\nu+1)]^{-1}$ ———(10)　$(\nu+1)$ステップまで観測した後での$x(\nu+1)$の最適推定値は，$\hat{x}(\nu+1|\nu+1)=\hat{x}(\nu+1|\nu)+\mathbb{A}(\nu+1)[y(\nu+1)-\mathbb{M}(\nu+1)\hat{x}(\nu+1|\nu)-y(\nu)]$ ———(11)　ここに，$\mathbb{A}(\nu+1)$は誤差を最小にするように定められるべき荷重行列でありイノベイション$[y(\nu+1)-\mathbb{M}(\nu+1)\hat{x}(\nu+1|\nu)-y(\nu)]$を減ずるべき方向に働くものである。さらに，推定誤差$\tilde{x}(\nu+1|\nu+1)$の共分散行列は，$\mathbb{P}(\nu+1|\nu+1)=[\mathbb{I}-\mathbb{A}(\nu+1)\mathbb{M}(\nu+1)]\mathbb{P}(\nu+1|\nu)$ ———(12)　これは最適な推定が行なわれている状態のもとでは，$\mathrm{tr}\,\mathbb{P}(\nu+1|\nu+1)\leq\mathrm{tr}\,\mathbb{P}(\nu|\nu)$という関係が成立し一定値に収束する。よって，最適推定値は$\mathrm{tr}\,\mathbb{P}(\nu+1|\nu+1)$が定常になったときの値をとればよい。式(11)の$\hat{x}(\nu+1|\nu+1)$の初期値$\hat{x}(0|0)$を求めるため，先験情報を平均値$\hat{x}(0|-1)$，分散$\mathbb{P}(0|-1)$の正規分布として与えると$\hat{x}(0|0)=\hat{x}(0|-1)+\mathbb{A}(0)[y(0)-\mathbb{M}(0)\hat{x}(0|-1)-y(-1)]$を得る。これ以後は，式(12)→式(9)→式(10)→式(11)の順に$\nu=1$から計算を行なえばよい。

3. むすび

ここに，カルマンフィルター理論を用いて，非線形関係にある貯留係数と透水量係数を$T/S=\alpha$，$1/S=\beta$という新しいパラメータによって線形化し状態量を推定する方法を示したが，今後その妥当性について検討していきたい。適用したカルマンフィルター理論の特徴は次のようである。(1).式(7)に示す正規白色雑音を有する非定常線形システムの状態量推定が，確率過程の定常性を仮定せず得られること。(2).最適推定値は，式(11)で示されるように逐次計算により求められること。
尚，本研究は昭和56年度文部省科学研究費（一般C）の援助を受けた。

（参考文献）

1) Chander, S., P.N. Kapoor and S.K. Goyal：Aquifer Parameter Estimation Using Kalman Filters, A.S.C.E., Vol.107, No.IR1, pp.25-33, March, 1981.　2) 日野幹雄：Kalmanの予測推定理論の平易な誘導について，東工大土木工学科研究報告，No.15, pp.91-99, 1973年12月.　3) 有本卓：カルマンフィルター，産業図書，1977.　4) 辻野三：最適制御概論，養賢堂，1979.