319—⑮ 有限変形における全ポテンシャルエネルギー第2変分の誘導

熊本大学工学部 正員 三池亮次

1.はじめに 弾性安定問題において、全ポテンシャルエネルギーの第2変分 $\delta^2\Pi$ は重要な役割を演じており、座屈荷重とは $\delta^2\Pi$ が正の定符号でなくなる荷重である。

一般に、弾性体の微小変形理論においては、必ず $\delta^2\Pi>0$ であり、$\delta^2\Pi<0$ となり得るのは有限変形の場合であって、有限変形における全ポテンシャルエネルギーの第2変分を誘導することは興味ある問題である。

2.付帯条件をもった汎関数の第2変分 変関数 y の変数 x の各要素に関する導関数を y' とすると、汎関数

$$I=\iiint_{V_0} F(x;y,y')\,dV_0 \qquad (1)$$

を付帯条件

$$\phi=[\phi_1\ \phi_2\cdots\ \phi_r]^T=\phi(x;y,y')=0,\quad \phi_i=\phi_i(x;y,y') \qquad (2)$$

の下で極値とする条件を求める。汎関数 I の全変分は

$$\delta I^{(T)}=\iiint_{V_0}\left(\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\right)F\,dV_0+\frac{1}{2}\iiint_{V_0}\left(\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\right)^2F\,dV_0+\cdots\cdots \qquad (3)$$

同様に、式(3)の ϕ_i の全変分 $\delta\phi_i^{(T)}$ を求め、これらに 変数 x のみの関数で y について独立の Lagrange 未定係数 λ を乗じて、式(3)に加えると、式(3)の F の代りに $F^*=F+\lambda^T\phi$ を用いることが可能であることを知る。したがって、汎関数 I の停留条件およびその第2変分 $\delta^2 I$ は、

$$\delta I=\iiint_{V_0}\left(\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\right)F^*\,dV_0=0\quad,\quad \delta^2 I=\frac{1}{2}\iiint_{V_0}\left(\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\right)^2F^*\,dV_0 \qquad (4)$$

であり、停留点において $\delta^2 I$ が正のとき、汎関数 I は停留点において最小であり、$\delta^2 I$ が負のとき I は停留点において最大で不安定な停留点となる。

3.有限変形における全ポテンシャルエネルギーの第2変分 物体内部の任意点の位置ベクトル a が、物体力 $\mathbf{f}$ および表面力 p を受けて有限の変位 Δu を生じ、位置ベクトル $x=a+\Delta u$ になるものとする。その変形前後の体積要素を δV_0, δV、面積要素を δA_0, δA とし、変形前の物体表面の外側法線方向の単位ベクトルを n_0 とすると、変形前の体積および面積に換算された物体力 $\mathbf{f}^*=\mathbf{f}\,\delta V/\delta V_0$ および $p^*=p\,\delta A/\delta A_0$ と、それによって物体内部に生ずる Kirchhoff 応力テンソル T_K の間に、次式

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}T_K\right)\frac{\partial}{\partial a}+\mathbf{f}^*=0\quad,\quad \frac{\partial x}{\partial a}T_K n_0=p^* \qquad (5)$$

が成立する。この有限変位 Δu および Δu の関数である、次式

$$E_g=\frac{1}{2}(U'+U'^T+U'^TU')\ ,\quad U'^T=\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial a}\right)^T\equiv[\Delta u_1'\ \Delta u_2'\ \Delta u_3'],\quad \Delta u_i'=\frac{\partial\Delta u_i}{\partial a} \qquad (6)$$

によって定義される Green ひずみテンソル E_g を変関数とする汎関数

$$\Pi=\iiint_{V_0} f\,dV_0+\iint_{A_0} H\,dA_0 \qquad (7)$$

は、全ポテンシャルエネルギーである。ここに、式(6)の第1式は付帯条件として式(7)の中に組み込まれ

$$f=U+\mathrm{trace}\left[\left\{E_g-\frac{1}{2}(U'+U'^T+U'^TU')\right\}\Lambda\right]-\mathbf{f}^*\cdot\Delta u,\quad H=-p^*\cdot\Delta u \qquad (8)$$

式(8)の中に現われる U はひずみエネルギー密度関数で，$U=\mathrm{trace}(T_K E_g)$ のように $\partial U/\partial E_g = T_K$ となるような E_g の関数である。また，もし T_K と E_g の間に通常の応力とひずみの間の構成方程式

$$T_K = 2G E_g + \lambda\,\mathrm{trace}(E_g)\cdot I \tag{9}$$

が成立する場合は

$$U = G\,\mathrm{trace}(E_g^2) + \frac{1}{2}\lambda\{\mathrm{trace}(E_g)\}^2 \tag{10}$$

のような U を用いることも可能である。なお，G，λ はせん断弾性係数，Lamé の定数である。

汎関数 Π の停留条件は[1]，式(4)の第1式において y の代りに Δu と E_g を用いると，Euler 方程式として，

$$\frac{\partial f}{\partial E_g} = \frac{\partial U}{\partial E_g} + \Lambda^T = 0 \qquad \text{これより} \quad \Lambda = \Lambda^T = -T_K \tag{11}$$

および

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta u} - \frac{\partial f}{\partial U'}\frac{\partial}{\partial a} = -f^* + \frac{1}{2}(\Lambda^T + \Lambda + 2U'\Lambda)\frac{\partial}{\partial a} = 0, \text{(式(5)の第1式)} \tag{12}$$

境界において

$$\frac{\partial f}{\partial U'} n_0 + \frac{\partial H}{\partial \Delta u} = -\frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^T + 2U'\Lambda) n_0 - p^* = 0 \text{，(式(5)の第2式)}$$

あるいは

$$\delta \Delta u = 0 \tag{13}$$

さて，式(4)の第2式を用いて Π の第2変分を求めよう。ひずみエネルギー密度関数が式(10)で与えられるとき，式(11)を用いて

$$\delta y^T \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{trace}\left(\delta E_g^T \frac{\partial f}{\partial E_g}\right) - \delta\Delta u\cdot f^* = \mathrm{trace}\left\{\delta E_g^T\left(2GE_g + \lambda\,\mathrm{trace}(E_g)\cdot I + \Lambda^T\right)\right\} - \delta\Delta u\cdot f^* \tag{14}$$

また，同様に

$$\delta y'^T \frac{\partial f}{\partial y'} = \mathrm{trace}\left(\delta U'^T \frac{\partial f}{\partial U'}\right) = -\mathrm{trace}\left\{\delta U'^T(\Lambda + \Lambda^T + 2U'\Lambda)\frac{1}{2}\right\} \tag{15}$$

したがって

$$\begin{aligned}\delta y^T \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta y^T \frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \mathrm{trace}\left[\delta E_g^T \frac{\partial}{\partial E_g}\mathrm{trace}\left\{\delta E_g^T\left(2GE_g + \lambda\,\mathrm{trace}(E_g)\cdot I\right\}\right]\\ &= 2G\,\mathrm{trace}(\delta E_g^2) + \lambda\{\mathrm{trace}(\delta E_g)\}^2\end{aligned} \tag{16}$$

同様に

$$\begin{aligned}\delta y'^T \frac{\partial}{\partial y'}\left(\delta y'^T \frac{\partial f}{\partial y'}\right) &= -\mathrm{trace}\left[\delta U'^T \frac{\partial}{\partial U'}\mathrm{trace}\left\{\delta U'^T(\Lambda^T + \Lambda + 2U'\Lambda)\frac{1}{2}\right\}\right]\\ &= -\mathrm{trace}(\delta U'^T \delta U' \Lambda^T) = \mathrm{trace}(\delta U' \; T_K \, \delta U'^T)\\ &= \delta\Delta u_1'^T T_K \,\delta\Delta u_1' + \delta\Delta u_2'^T T_K\, \delta\Delta u_2' + \delta\Delta u_3'^T T_K\, \delta\Delta u_3'\end{aligned} \tag{17}$$

したがって，全ポテンシャルエネルギー Π の第2変分

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\iiint_{V_0}\left[2G\,\mathrm{trace}(\delta E_g^2) + \lambda\{\mathrm{trace}(\delta E_g)\}^2 + \mathrm{trace}(\delta U'^T \delta U' \, T_K)\right] dV_0 \tag{18}$$

を得ることができる。

参考文献：1) 三池亮次："有限変形における増分形エネルギー基礎理論" 土木学会論文報告集　第309号　昭56.5