ラプラス変換による2,3のたわみ解法

九州学院大学　正会員　堀 純男

緒言

たわみの解法には微分方程式による解法が普通使われているが本論ではラプラス変換による方法を行った。ラプラス変換は集中荷重,等分布荷重の様な荷重には今まで使われて来た。しかし軸方向力,1点に作用するモーメントによるたわみは未だラプラス変換の方法で解かれてあるのを見た事がない。そこでこれ等をラプラス変換で出来る様にしたいと思い試みた結果思い通りになり微分方程式による方法と値が一致した。

[1]軸方向力Pが作用した場合のたわみの方程式(図1)

E;ヤング係数　I;断面2次モーメント　l;支間長

y;たわみ　x;支点Aより任意点迄の距離

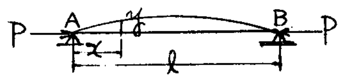


図1

$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Py$　$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-P\frac{d^2y}{dx^2}$ 両辺をLaplace変換して

$$p^4L\{y\}-p^3y_0-p^2y_0'-py_0''-y_0'''=-\frac{P}{EI}\left[p^2L\{y\}-py_0-y_0'\right]$$

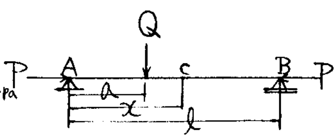
Boundary condition $y_0=y_0''=0$　$y_0'''=-\frac{P}{EI}y_0'$

$$L\{y\}\left\{p^4+\frac{P}{EI}p^2\right\}=y_0'\left\{p^2+\frac{P}{EI}\right\}+y_0'''=p^2y_0'\qquad L\{y\}=\frac{y_0'}{p^2+P/EI}=\frac{1}{k}\,\frac{ky_0'}{p^2+k^2}$$

$\therefore y=\frac{1}{k}y_0'\sin kx$ -----(1)を得る。　但し $k^2=P/EI$

[2]軸方向力Pと集中荷重Qが共に作用する場合のたわみの方程式(図2)

$\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{P}{EI}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Q}{EI}\delta(x-a)$　両辺をLaplace変換して



$l-a=b$　図2

$$p^4L\{y\}-p^3y_0-p^2y_0'-py_0''-y_0'''=-\frac{P}{EI}\left[p^2L\{y\}-py_0-y_0'\right]+\frac{Q}{EI}e^{-pa}$$

Boundary condition $y_0=y_0''=0$　$y_0'''=-\frac{Q}{EI}\frac{l-a}{l}$

$$L\{y\}=\frac{1}{p^2}y_0'+\frac{Q}{EI}\frac{e^{-pa}}{p^2(p^2+P/EI)}-\frac{Qb}{EIl}\frac{1}{p^2(p^2+P/EI)}$$

$k^2=\frac{P}{EI}$ と置くと

$$y=xy_0'+\frac{Q}{P}(x-a)u(x-a)-\frac{Q}{Pk}\sin k(x-a)u(x-a)-\frac{Qb}{Pl}\left(x-\frac{1}{k}\sin kx\right)$$

$0\leqq x\leqq a$ の時 $y=xy_0'-\frac{Qb}{Pl}\left(x-\frac{1}{k}\sin kx\right)$

$a\leqq x\leqq l$ の時 $y=xy_0'+\frac{Q}{P}(x-a)-\frac{Q}{Pk}\sin k(x-a)-\frac{Qb}{Pl}(x-\sin kx)$

$x=l$ の時 $y=0$ より $y_0'=\frac{Q}{Plk}\left(\sin kb-\frac{b}{l}\sin kl\right)$

故に $0\leqq x\leqq a$ の時　$y=\frac{Q}{Plk}\left(\sin kb-\frac{b}{l}\sin kl\right)-\frac{Qb}{Pl}\left(x-\frac{1}{k}\sin kx\right)$ ------(2)

$a\leqq x\leqq l$ の時 $y=\frac{Q}{Plk}\left(\sin kb-\frac{b}{l}\sin kl\right)+\frac{Q}{P}(x-a)-\frac{Q}{Pk}\sin k(x-a)-\frac{Qb}{Pl}\left(x-\frac{1}{k}\sin kx\right)$ ---(3)

[3]はり上の1点に作用するモーメントM_0のLaplace変換

図3(a)のモーメントを図3(b)の様に向きの相異なる2つの集中荷重すなわち偶力に分けて考える。

$q(x)=-\frac{M_0}{\varepsilon}\delta(x-a)+\frac{M_0}{\varepsilon}\delta(x-a-\varepsilon)$

$w(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} q(x)$ に於て $M_0=1$ で定義された関数を

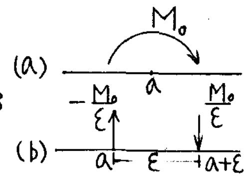
$m(x-a)$ とすると $w(x)=M_0.m(x-a)$

$$w(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{M_0}{\varepsilon}\delta(x-a)+\frac{M_0}{\varepsilon}\delta(x-a-\varepsilon)\right\}$$

両辺を Laplace 変換すると

$$L\{w(x)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}L\left\{-\frac{M_0}{\varepsilon}\delta(x-a)+\frac{M_0}{\varepsilon}\delta(x-a-\varepsilon)\right\}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{M_0}{\varepsilon}e^{-ap}+\frac{M_0}{\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)p}\right\}=-M_0pe^{-ap}$$

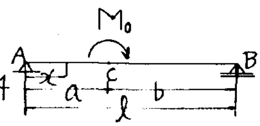
$$\therefore L\{M_0.m(x-a)\}=-M_0pe^{-ap}$$

図3 

[4] 点Cにモーメント M_0 が作用する時のたわみの方程式（図4）

$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{EI}M_0.m(x-a)$ 両辺を Laplace 変換すると

$$L\left\{\frac{d^4y}{dx^4}\right\}=\frac{1}{EI}L\{M_0.m(x-a)\}$$
$$y=y_0+y_0'x+\frac{1}{2}y_0''x^2+\frac{1}{6}y_0'''x^3+L\left[\frac{-M_0pe^{-ap}}{EIp^4}\right]$$

図4 

Boundary condition $y_0=y_0''=0$　$y_0'''=\frac{M_0}{EI\ell}$

$y=y_0'x+\frac{M_0}{6EI\ell}x^3-\frac{M_0}{2EI}(x-a)^2u(x-a)$　　$x=\ell$ の時 $y=0$ より $y_0'=\frac{M_0b^2}{2EI\ell}-\frac{M_0\ell}{6EI}$

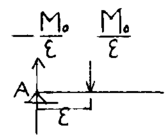
$\therefore 0\leqq x\leqq a$ の時 $y=\left(\frac{M_0b^2}{2EI\ell}-\frac{M_0\ell}{6EI}\right)x+\frac{M_0}{6EI\ell}x^3$ ----------(4)

$a\leqq x\leqq \ell$ の時 $y=-\frac{M_0a^2}{2EI}+\left(\frac{M_0b^2}{2EI\ell}-\frac{M_0\ell}{6EI}+\frac{M_0a}{EI}\right)x-\frac{M_0}{2EI}x^2+\frac{M_0}{6EI\ell}x^3$ -----(5)

[5] Laplace 変換 $L\{M_0.m(x-a)\}$ 使用上の注意

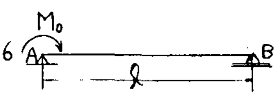
はり上の1点にモーメント M_0 が作用する場合には

$L\{M_0.m(x-a)\}=-M_0pe^{-ap}$ を使用出来るが支点Aに M_0 が作用する場合には注意を要する。点Aの M_0 は図5の様な偶力と置くのであるからA点に M_0 は生じない。そこで(4)式に $a=0$, $b=\ell$ を代入すれば可

図5 

従って図6のたわみの方程式は

$y=\frac{M_0\ell}{3EI}x-\frac{M_0}{2EI}x^2+\frac{M_0}{6EI\ell}x^3$ ------------(6) を得る。

図6 

結言

2,3の解法を前述した通りよい結果を得た。微分方程式による結果とラプラス変換による結果をくらべるための数値を代入した計算も種々やって見たがどれもこれも間違いなく一致した。ラプラス変換は微分方程式解法にない利点がある。それは機械的に計算出来微分方程式の様に曲げモーメントの方程式を書く必要がなくはりの上の上載荷重をそのまゝ式に記せばよいから多くの荷重が複雑に載荷しても大儀でない。又不静定でも楽に解ける。それから微分方程式に出て来ない数式が出て来て新たな考え方に気が付く。この意味でラプラス変換による解法に心を注いだ事を幸いに思っている。

参考文献

構造力学 第II巻 小西一郎著　　フーリエ解析例題演習　絹川正吉著

構造力学　大村 裕著　　ラプラス変換 J.HEADING著 後藤憲一訳