

1. まえがき

崩壊荷重の上界を求める手法の一つに川井によって開発されたバネ剛体モデル⁽¹⁾がある。このモデルは固体を有限個の剛体と剛体を連結するバネによって表現し、固体の変形や力の伝達はバネの変形によって行われるものとしている。このため要素境界のえりや分離の表現が簡単にできる。上界は降伏応力に達したバネを次々に切断することにより求められる。バネ剛体モデルと同様に要素間のえりや分離が簡単に取り扱えるモデルとして、渡辺によって、Fig-1 に示すように辺中央に節点を有するハイブリッドストレスモデル⁽²⁾が開発された。この要素は応力場を一次式に仮定しているため変形、応力共バネ剛体モデルより高い信頼性を有している。本研究では渡辺によって開発されたハイブリッドストレスモデルをコンクリート、土、岩等のモールクーロンの式に従う材料の上界を求める方法について報告する。

2. 基礎理論

ハイブリッドストレスモデルの変分原理⁽²⁾は

$$\Pi_{CH} = \sum_e \left(\int_{V_e} B(\sigma_{ij}) dxdy - \int_{S_{en}} u_i \bar{T}_i + \int_{S_{en}} u_i \bar{T}_i dS \right) \quad (1)$$

で与えられる。ここに $B(\sigma_{ij})$ はコンプリメンタリーエネルギーで、 u_i : 変位、 σ_{ij} : 応力、 $\bar{T}_i = \sigma_{ij} n_j$, n_j : 外向余弦、 $\bar{T}_i$: 外力である。Σは要素全部の和を意味する。Fig-1 に示すように全体座標を x, y とし局座標を要素境界ごとに n, s で定義すれば応力、変位についてそれぞれ次の式が成立する。

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2, \quad \sigma_s = \sigma_x m^2 + \sigma_y l^2 - 2\tau_{xy} lm, \quad \tau_{ns} = -(\sigma_x - \sigma_y) lm + \tau_{xy} (l^2 - m^2) \quad (2)$$

$$u_x = lU - mV, \quad u_y = mU + lV \quad (3)$$

ここに l, m は方向余弦、 u_x, u_y はそれぞれ x, y 方向の変位である。 U, V は要素境界の n 方向、 s 方向の変位を示す。式(2),(3)を用いて式(1)の右辺第2項の積分を変換すると、

$$\int_{S_{en}} u_i \bar{T}_i dS = \int_{S_{en}} (lU - mV)(\sigma_n l + \tau_{ns} m) + (mU + lV)(\tau_{ns} l + \sigma_n m) dS = \int_{S_{en}} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) dS \quad (4)$$

となる。式(1)の右辺第3項についても同様に計算できるので、式(1)は次のように表わされる。

$$\Pi_{CH} = \sum_e \left(\int_{V_e} B(\sigma_{ij}) dxdy - \int_{S_{en}} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) dS + \int_{S_{en}} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) dS \right) \quad (5)$$

ここで渡辺によって導かれた要素の剛性マトリックスを得るためには応力場、変位場を次のように仮定する。

$$\sigma_n = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y, \quad \sigma_y = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y, \quad \tau_{xy} = -\beta_7 y - \beta_8 x + \beta_9 \quad (6)$$

$$U = u_0 + \theta_1 S, \quad V = u_2 \quad (7)$$

式(7)で u_0, θ_1, u_2 は点の変位を意味する。

要素境界にえりが生じ、上っている間 σ_n と σ_s の関係は Fig-2 に示すモールクーロンの式が成立しているとするれば、増分形で示せば次式を満たさなければならない。

$$\Delta \tau_{ns} \pm C_1 \Delta \sigma_n = 0 \quad (8)$$

式(8)をラグランジエの未定乗数 λ を使って式(5)に加えると

$$\Pi_{CH} = \sum_e \left(\int_{V_e} B(\sigma_{ij}) dxdy - \int_{S_{en}} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) dS + \int_{S_{en}} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) dS - \int_{S_{en}} \lambda (\tau_{ns} \pm C_1 \sigma_n) dS \right) \quad (9)$$

となる。ここで応力、変位は増分量であるが、増分記号 Δ を省略して示してある。えりが生じている時でもえり線での σ_n は連続である。 σ_n, τ_{ns} がモールクーロンの式を満たしておれば当然 σ_s も連続になる。したがってえりが生じている時には $V = 0$ とする。応力場と変位場を仮定し剛性マトリックスを導く方法を示す。応力場は式(6)のように仮定し、これを式(10)のように表わす。歪と応力の関係式は材料定数マトリックスを $[C]$ とし式(11)で表わす。

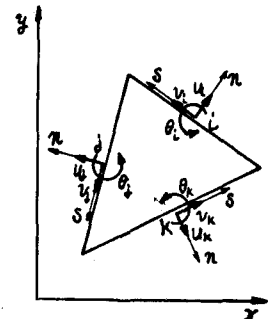


Fig-1 2次元ハイブリッドストレスモデル

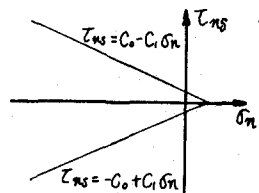


Fig-2 モールクーロンの式

$$\{F\} = \{B\}\{P\} \quad (10) \quad \{G\} = \{C\}\{P\} \quad (11)$$

式(10), (11)を利用すれば式(9)の右辺第1項の積分は

$$\int_{\Omega} B(\bar{r}_{ij}) dx dy = \frac{1}{2} \{B\}^T [H] \{B\} \quad (12)$$

ここに $[H] = \int_{\Omega} [B]^T [C] [B] dx dy$, $\{B\}^T = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ とある。式(9)の右辺第2項は式(2), (6), (7)を用いて

$$\int_{\Omega} (U \bar{r}_n + V \bar{r}_{ns}) dS = \{B\}^T [G] \{U\} \quad (13)$$

となる。ここに $\{U\}^T = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ である。 $[H]$, $[G]$ の具体的な内容については参考文献(1)を参照して欲しい。外力を $\{\bar{F}\}$ とすると式(9)の右辺第3項は

$$\int_{\Omega} (U \bar{r}_n + V \bar{r}_{ns}) dS = \{U\}^T \{\bar{F}\} \quad (14)$$

となる。式(9)の S_{slip} で積分は式(2)を用いて

$$\begin{aligned} \int_{S_{slip}} T(\tau_{ns} \pm C, \bar{r}_n) dS = & \{B\}^T \int_{S_{slip}} [\pm C, l^2 - lm \quad x(\pm C, l^2 - lm) - y(\pm 2lmC_1 + l^2 - m^2) \\ & y(\pm C, l^2 - lm) \pm C_1 m^2 + lm \quad x(\pm C, m^2 + lm) \quad y(\pm C_1 m^2 + lm) - x(\pm 2lmC_1 + \\ & l^2 - x^2) \pm 2lmC_1 + (l^2 - m^2)] dS T \end{aligned} \quad (15)$$

となる。1個の三角形について2個所が2個3個所あるなら式(15)の積分はその数だけ実行する。したがって A をベクトルとして

$$\int_{S_{slip}} T(\tau_{ns} \pm C, \bar{r}_n) dS = \{B\}^T [G] \{T\} \quad (16)$$

とする。式(12), (13), (14), (16)を式(9)に代入すれば

$$\pi_{ch} = \frac{1}{2} \{B\}^T [H] \{B\} - \{B\}^T [G] \{U\} - \{U\}^T \{\bar{F}\} - \{B\}^T [G] \{T\} \quad (17)$$

となる。ここで $\{B\}$ に関する停留条件より

$$\{B\} = [H]^{-1} \{G\} \{U\} + [G] \{T\} \quad (18)$$

となり、これを式(17)に代入し $\{U\}$, $\{T\}$ について停留条件を求めると

$$[K_{11}] \{U\} + [K_{12}] \{T\} = \{\bar{F}\}, [K_{21}] \{U\} + [K_{22}] \{T\} = \{0\} \quad (19)$$

となる。ここに $[K_{11}] = [G]^T [H]^{-1} [G]$, $[K_{12}] = [G]^T [H]^{-1} [G]$, $[K_{21}] = [G]^T [H]^{-1} [G]$, $[K_{22}] = [G]^T [H]^{-1} [G]$ である。式(19)から $\{T\}$ を消去すれば

$$([K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{21}]) \{U\} = \{\bar{F}\} \quad (20)$$

となる。式(20)が2個所では $U=0$ として計算を行う。

3. 解析例

Fig-3は基礎の支持力の問題を解いたもので荷重変位曲線をプロットした図である。摩擦係数が0.1, 0.2の時は文献(4)より押え荷重を無視した時の上界 $q_u^* = C_0 \cot \phi \{ \tan(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}) \exp(\pi \tan \phi) - 1 \}$ ここに q_u^* : 支持力, ϕ : 摩擦角, C_0 : 粘着力と比較した。摩擦角が大きくなると誤差も大きくなるので要素分割を変える必要がある。なお要素分割は文献(3)を参考にした。Fig-4はコンクリートブロックの割裂の問題を取り扱ったものである。図は $\frac{1}{2}$ だけを描いた。 h を2~6cmまで変え計算したところ、 h が3~4cmの時に最小の荷重を示している。文献(5)に載っている式を使って最小値を求めると320.0%ととなりハイブリッドストレスモデルによる値323.4%と近い。

4. 謝辞

本研究にあたり貴重な御助言をいただいた、東大、川井孝彦教授、三菱総合研究所、渡辺正明氏、琉球大学、具志幸昌教授、和仁屋晴雄助教授に深く感謝いたします。

参考文献 (1)川井孝彦稿"物理モデルによる連続体力学諸問題の解析(第2回)" 生研セミナー, (2)廣津新一郎"弾性学の変分原理概論"培風館, (3)工藤英明, 東大研研集報, 1958年(4)山口柏樹"土の力学" 共立出版, (5)木永保美, 石丸麟太郎"組み合わせ応力を受けるコンクリート材の動力学的解析(403)" 建築学会論文報告集, No. 220

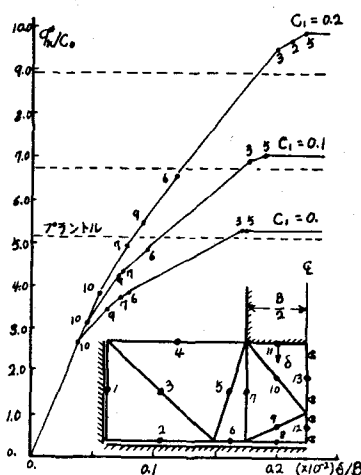


Fig-3 基礎の支持力

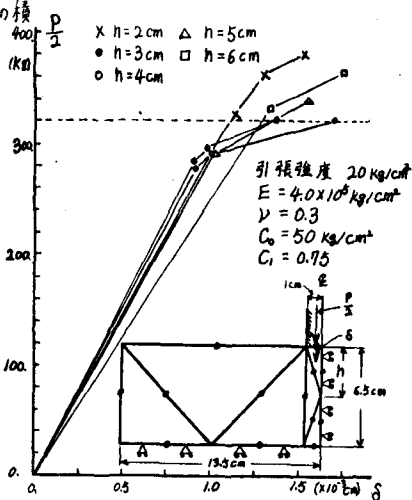


Fig-4 コンクリートブロックの割裂