

長崎大学工学部 学生員・金正伸広

“ “ 佐藤秀雄

“ 正 員 高橋和雄

1. 緒言 各種の係数励振振動系の不安定領域の決定法として、従来 Bolotin の方法や Hau の方法が使用されているが、これらの解法はいずれも十分条件のみを満足する。このために、係数励振振動系の不安定領域の合理的な計算法の確立が望まれている。そこで、著者らは非自由度系の非線形振動の解の安定判別法として選定の Hill の方程式の固有値問題による解法を提案する^(1,2)とともに、各種の動的安定問題に適用して、本法の有効性を吟味してきた。これより、本法は係数励振振動系の不安定領域の決定法として既往研究の不備を補う有力な方法であることが立証される。しかし、定式化の過程において各基準座標ごとに式表の大きさが等しいという仮定を導入しているために、式表の大きさが異なる問題に適用することができない。今回、この仮定を破くことに成功したので解の性質と非自由度系に適用した結果を報告するものである。

2. 解法 係数励振振動系の微分方程式は次のように表わされる。

$$C\ddot{x} + 2CH\dot{x} + (I - \alpha A)x - \varepsilon B \cos \theta t \dot{x} = 0 \quad (1) \quad \text{ここに、} C, H, A, B: \text{係数行列、} I: \text{単位行列、}$$

α : 一定荷重の大きさ、 ε : 係数励振振動系の荷重振幅、 θ : 励振円振動数、 x : 一般座標

式(1)の一般解が周期 $T (=2\pi/\theta)$ または $2T$ の解を含むことを考慮して、次のように仮定する。

$$x = e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin \frac{n\theta t}{2} + b_n \cos \frac{n\theta t}{2}) \right\} \quad (2) \quad \text{ここに、} b_0, b_n, b_n: \text{時間に関係のないベクトル}$$

式(1)と式(2)を代入して調和バランス法を適用すれば、次の2組の同次方程式が得られる。

$$\begin{cases} (\lambda^2 C + 2\lambda CH + I - \alpha A) b_0 - \beta B b_0 = 0, \\ (\lambda^2 C + 2\lambda CH + I - \alpha A - \frac{\pi^2 \theta^2}{4} C) b_n - \frac{1}{2} \beta B (b_{n+2} + b_{n-2}) + n\theta (CH + \lambda C) b_n = 0, \\ (\lambda^2 C + 2\lambda CH + I - \alpha A - \frac{\pi^2 \theta^2}{4} C) b_n - \frac{1}{2} \beta B (b_{n+2} + b_{n-2}) - n\theta (CH + \lambda C) b_n = 0, \quad n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3) \quad \begin{matrix} \text{周期} T \text{に対する} \\ \text{同次方程式} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} (\lambda^2 C + 2\lambda CH + I - \alpha A - \frac{\theta^2}{4} C - \frac{1}{2} \beta B) b_1 - \frac{1}{2} \beta B b_3 + \theta (CH + \lambda C) b_1 = 0, \\ (\lambda^2 C + 2\lambda CH + I - \alpha A - \frac{\theta^2}{4} C + \frac{1}{2} \beta B) b_1 - \frac{1}{2} \beta B b_3 - \theta (CH + \lambda C) b_1 = 0, \\ (\lambda^2 C + 2\lambda CH + I - \alpha A - \frac{\pi^2 \theta^2}{4} C) b_n - \frac{1}{2} \beta B (b_{n+2} + b_{n-2}) + n\theta (CH + \lambda C) b_n = 0, \\ (\lambda^2 C + 2\lambda CH + I - \alpha A - \frac{\pi^2 \theta^2}{4} C) b_n - \frac{1}{2} \beta B (b_{n+2} + b_{n-2}) + n\theta (CH + \lambda C) b_n = 0, \quad n=3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (4) \quad \begin{matrix} \text{周期} 2T \text{に対する} \\ \text{同次方程式} \end{matrix}$$

表-2 First tenth imaginary parts of eigenvalues λ of the undamped case

No.	Stable point ($\bar{\omega}=2.4, \varepsilon=0.4$)		Unstable point ($\bar{\omega}=2.4, \varepsilon=0.5$)	
	$\text{Im}(\lambda)$	$\text{Im}(\lambda_1) \pm (m-1)\bar{\omega}$	$\text{Im}(\lambda)$	$\text{Im}(\lambda_1) \pm (m-1)\bar{\omega}$
1	1.1333	1.1333	1.2000	1.2000
2	1.2667	1.2667	1.2000	1.2000
3	3.5333	3.5333	3.6000	3.6000
4	3.6667	3.6667	3.6000	3.6000
5	5.9333	5.9333	6.0000	6.0000
6	6.0667	6.0667	6.0000	6.0000
7	8.3333	8.3333	8.4000	8.4000
8	8.4667	8.4667	8.4000	8.4000
9	10.7333	10.7333	10.8000	10.8000
10	10.8667	10.8667	10.8000	10.8000

式(3)および式(4)は次のように行列表示される。

$$(M_0 - \lambda M_1 - \lambda^2 M_2) x = 0 \quad (5)$$

式(5)の固有値から解の安定性が明らかになる。

3. 解の性質の検討 次の1自由度系の Mathieu の方程式に対する解の性質を明らかにする。

表-1

Eigenvalues λ of the undamped case for the first and second stability boundaries when $\varepsilon=0.5$

boundary name	$\bar{\omega}$	stable or unstable	period T		period 2T	
			$\text{Re}(\lambda)$	$\text{Im}(\lambda)$	$\text{Re}(\lambda)$	$\text{Im}(\lambda)$
S_{11}	2.4656	stable	0.0	1.23639	0.0	2.46919
	2.4655	unstable	0.00338	1.23275	0.00338	0.0
C_{11}	1.4592	stable	0.0	3.65470	0.0	4.38430
	1.4593	unstable	0.00411	3.65770	0.00411	4.38735
S_1	1.0375	stable	0.0	0.00365	0.0	0.52239
	1.0374	unstable	0.00365	0.0	0.00366	0.51870
C_1	0.7651	stable	0.0	1.56350	0.0	1.94605
	0.7652	unstable	0.00440	1.56094	0.00440	1.94354

表-3

Eigenvalues λ of the damped case for the first and second stability boundaries when $\varepsilon=0.5$

boundary name	$\bar{\omega}$	present solution		preceding solution		
		$\text{Im}(\lambda)$	$\text{Re}(\lambda)$	$\text{Im}(\lambda)$	$\text{Re}(\lambda)$	$\text{Re}(\lambda)-h$
S_{11}	2.4551	1.22655	0.00015	1.22655	0.05015	0.00015
C_{11}	1.2604	3.67546	0.00019	3.67546	0.05019	0.00019
S_1	1.0265	0.0	0.00006	0.0	0.05006	0.00006
C_1	0.7727	1.57593	0.00008	1.57593	0.05013	0.00013

$$\ddot{f} + 2R\Omega\dot{f} + \Omega^2(1 - 2E\cos\theta t)f = 0 \quad (6) \quad \text{== F. } R = \frac{1}{2}\Omega, \bar{\omega} = \frac{\Omega}{2}$$

上式は図-1に示すような不安定領域を有するが、非減衰の場合 ($R=0$) に、式(5)は入の偶数次のべきの項のみを含むので、固有値入は次の性質を有する。

$$1) \lambda = \pm \beta i \quad (\text{安定領域}), \quad \lambda = \pm(\alpha \pm \beta i) \quad (\text{不安定領域}) \quad (7)$$

$R=0$ の場合の第1 (S_n, C_n)、第2 (C_n, S_n)不安定領域近傍の固有値のうち、実数部を持つ場合を示せば、表-1のとおりである。これより

2) 周期T(式(3))と周期2T(式(4))は同じ境界線を与える。

3) 周期Tと2Tの固有値の実数部は同じである。

$$Re(\lambda) = Re(\lambda) \quad (8)$$

4) 周期Tと2Tの固有値の虚数部には次の関係が成立する。 $Im(\lambda) = Im(\lambda) \pm \frac{\bar{\omega}}{2}$ (9)

以上の2)~4)より、本題に対してFourier級数の周期はTおよび2Tのいずれでもよい。

表-2に不安定点および安定点の10までの固有値の虚数部を示す。これより式(9)が成立する。

$$5) \quad Im(\lambda_n) = Im(\lambda_1) \pm (n-1)\bar{\omega} \quad (10)$$

減衰定数 $R=0.05$ の場合に対して本表と式(1)を標準形に直す前報の方法(文献1)~5)の固有値との比較を示せば表-3のとおりである。これより、1自由度系に対して日本主と前報の方法とは全く同一の境界線を与え、次のような関係が成り立つ。

$$6) \quad Re(\lambda) = Re(\lambda) - R, \quad Im(\lambda) = Im(\lambda) \quad (11)$$

4. 2自由度系の係数励振振動への応用

2自由度系の係数励振振動の例として次の通り

の曲げ、ねじり振動の動的安定問題を考える。

$$\bar{\omega} I \ddot{\theta} + \bar{\omega} \dot{\theta} + (K + F \cos \theta) \theta = 0 \quad (12)$$

$$\text{== F. } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2R_1\sqrt{F} & 0 \\ 0 & 2R_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \gamma & -\mu \\ -\mu & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -2RE \\ -2RE & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\omega} = \Omega/\omega_2, \quad \gamma = (\omega_1/\omega_2)^2, \quad R_1 = \frac{1}{2}\gamma/\omega_1, \quad R_2 = \frac{1}{2}\gamma/\omega_2$$

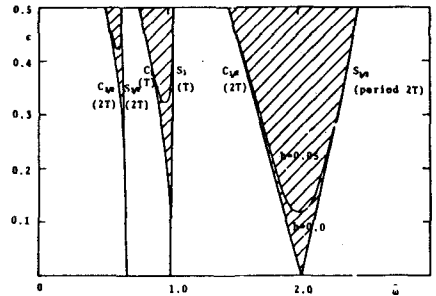
$\gamma=0.1, \mu=0.5$ に対して $\omega_1=0.270, \omega_2=1.015$ である。

式(12)の不安定領域を示せば、図-2~4に示すとおりである。図1より減衰の大きさは与えられる。

図-2: $R_2=0.02, R_1=0.150$ ($\gamma_2 < \gamma_1$), 図-3: $R_2=0.02, R_1=0.063$ ($\gamma_2 = \gamma_1$), 図-4: $R_2=0.02, R_1=0.01$ ($\gamma_2 > \gamma_1$)

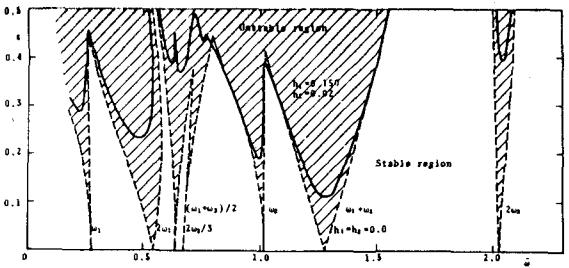
前報の方法では図-3の結果のみが得られるが、これについては両者が完全に一致している。減衰の効果は図-3の $\gamma_2 = \gamma_1$ の場合には単純共振($\bar{\omega} = 2\omega_1/\Omega$)および結合共振($\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/\Omega$)の不安定領域を減少させるが、減衰の大きさが異なる場合(本例では図-4の $\gamma_2 > \gamma_1$)には減衰によって不安定領域が拡大する脱安定化効果が現われてくる。

参考文献 1) Takahashi, K.: J. of Sound and Vibration, 67, 1979. 2) 高橋他: 土木学会論文報告集, 293号, 1980. 3) Takahashi, K.: J. of Sound and Vibration, 78, 1981. 4) Takahashi, K.: J. of Sound and Vibration, 79, 1981. 5) 高橋他: 土木学会論文報告集, 1982 (掲載予定)



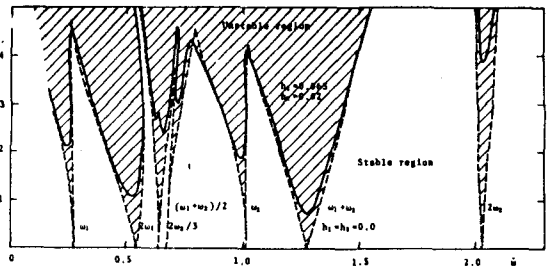
Regions of simple parametric instability for a Mathieu equation

図-1



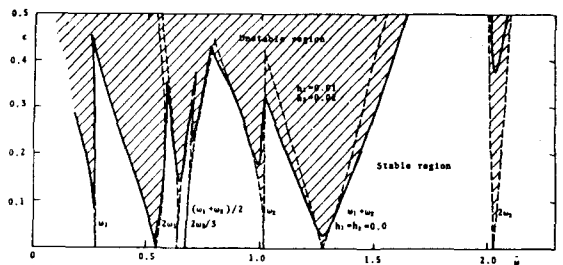
Regions of parametric instability for coupled Mathieu equations: $h_1=0.150, h_2=0.02$

図-2



Regions of parametric instability for coupled Mathieu equations: $h_1=0.063, h_2=0.02$

図-3



Regions of parametric instability for coupled Mathieu equations: $h_1=0.01, h_2=0.02$

図-4