

長崎大学工学部 学生員・佐藤孝雄

・ 金丘伸広
・ 田川 賢
・ 正 員 高橋和雄

1. 結言 著者はケーブルの面内加振による面内非線形応答および特定の振動数領域で生ずる面外分岐応答解析を行ない、これよりケーブルには面内加振によって面外振動が分岐する面内・面外連成応答が生ずることを示した¹⁾。一方、山口らはケーブルの面内加振による面内・面外連成振動実験を行ない、面外振動が生ずる領域を求めた²⁾。本研究では与りるケーブルの面内加振による面内・面外振動を係数振振動問題としてとらえ、面外振動が生ずる不安定領域を解析的に求めたので、報告するものである。

2. 解法 面内加振を受けるケーブルの面内非線形運動方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} L_1(u, v) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_0 \frac{1}{x} + C_1 x \right\} \frac{\partial u}{\partial x} + C_1^2 x^2 y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y_0^2 \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 (x_0^2 + \frac{\partial u}{\partial x}) \right\} - \frac{R \cos \Omega t}{P_0} = 0 \quad (1) \\ L_2(u, v) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_0 \frac{1}{x} + C_1 y_0^2 \right\} \frac{\partial v}{\partial x} + C_1^2 x^2 y_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y_0^2 \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 (y_0^2 + \frac{\partial v}{\partial x}) \right\} - \frac{R \cos \Omega t}{P_0} = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

ここに、 u, v : ケーブルの面内水平変位、鉛直変位、 t : 時間、 x_0 : ケーブルの初期形状に沿う曲線座標、 C_0, C_1 : ケーブルの縦波、横波伝播速度、 R, P_0 : 荷重強度、 Ω : 外力の円振動数、 $\{x_0, y_0, 0\}$: ケーブルの初期形状、式(1)、(2)の解を次のように変数分離形に仮定する。

$u = l \sum_{l=1}^{\infty} P_l(t) U_l(x_0), v = l \sum_{l=1}^{\infty} P_l(t) V_l(x_0)$ (3) ここに、 P_l : 未知の時間関数、 l : ケーブルの支点間水平距離、 $U_l(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ln}^u \sin \frac{n\pi x_0}{l}, V_l(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ln}^v \sin \frac{n\pi x_0}{l}$: 面内線形振動の第 l 次固有振動形、 l^* : 初期ケーブル長、式(3)を式(1)、(2)に代入して、ガラーキン法を適用し、さらに $P_n = \sum_{m=0}^{\infty} Q_{nm}^m \cos m\omega t$ (4) のように Fourier 級数に展開すれば、次のような非線形連立代数方程式が与えられる。

$$(R_n - m_n m^2 \omega^2) Q_{nm}^m + R^2 \sum_{j=1}^{\infty} R_{ijn} f_{ij}^m + \frac{R^2}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} R_{ijkn} f_{ijk}^m = P_n \delta_{1,m} \quad (5)$$

ここに、 $R^2 = C_1/C_0$: ケーブルの縦波-横波伝播速度比、 $\tau = \omega t$, ω : 傾斜した弦の1次固有円振動数、 $\omega = \Omega/\omega_1$ 、一方、非線形項を無視したケーブルの面外運動方程式は次のように表わされる。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_0 \frac{1}{x} \frac{\partial W}{\partial x} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x_0^2 \frac{\partial W}{\partial x} + y_0^2 \frac{\partial W}{\partial x}) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0 \quad (6)$$

ここに、 W : 面外変位、上式の解を次のように仮定する。 $W = l \sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) W_l(x_0)$ (7) ここに、 T_l : 未知の時間関数、 $W_l(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ln}^w \sin \frac{n\pi x_0}{l}$: 面外線形振動の第 l 次固有振動形

式(7)、(3)を式(6)に代入して、ガラーキン法を適用すれば、次の係数振振動形の運動方程式が与えられる。

$$[A_l] \ddot{T} + [A_k] \dot{T} + R^2 \{ [D_p^1] + [D_p^2] \cos \omega t + [D_p^3] \cos 2\omega t + [D_p^4] \cos 3\omega t \} T = 0 \quad (8)$$

ここに、 $[A_l], [A_k], [D_p^1]$: 係数行列、 $[D_p^1], [D_p^2], [D_p^3]$: 係数振振動の種数、幅を決定する行列

上式の不安定領域は文献3)の方法を用いて決定することができる。

3. 解析結果および考察 図1~3にサグ比 $\delta = 0.1$ 、伝播速度比 $R = 30$ の水平ケーブルの面内共振加振および逆共振加振による面内非線形応答と面外振動が生ずる不安定領域を示す。図中の肉太の実線は面内加振による安定な(実現しうる)応答曲線を

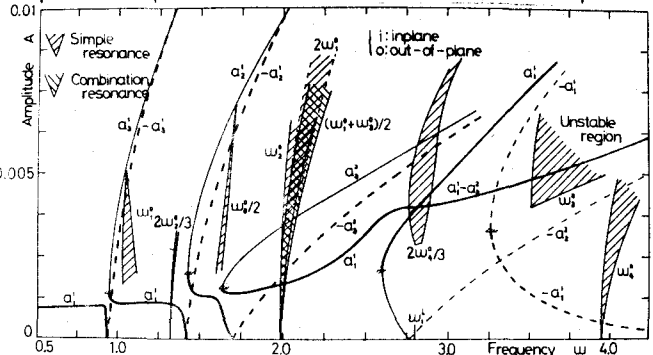


図-1 水平ケーブルの面内共振加振による応答および面外不安定領域

示し、細い実線と破線は不安定な（実現しえない）応答曲線を示すものである。安定な振幅と不安定な振幅の境界は応答曲線が鉛直接線を持つ位置と合致する。この安定な面内振動のもとにおいて特定の振動数領域で式(8)の不安定領域に対応する面外振動が生ずる。図中の斜線部が不安定領域である。図中の不安定領域は面内加振の高周強度の大きさを変えて、面内応答を求めて応答曲線上にえらった不安定領域をプロットしたものである。さう、係数振振動形の微分方程式からの情報によれば、式(8)の不安定領域は、

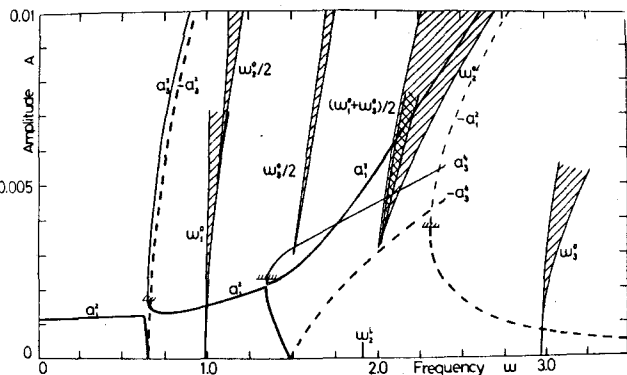


図-2 本平T-プルの面内並列相対加振による応答および面外不安定領域

$\omega = 2\omega_1/2$ 付近に生ずる単純共振 (simple parametric resonance) と $\omega = (\omega_1 \pm \omega_2)/2$ 付近に生ずる結合共振 (combination resonance) の2つがあり、 $k = 1$ の場合が主不安定領域、 $k = 2, 3, \dots$ の場合が副不安定領域と呼ばれている。また、結合共振において+の符号が和形の結合共振、-の符号が差形の結合共振と呼ばれている。これらのうちの種類の不安定領域が生ずるかは行列 $[D_1] \sim [D_3]$ の性質によって定まる。図-1~3において右上りの斜線部が単純共振に対応し、右下りの斜線部が結合共振に対応するものである。図-1の対称加振の場合には単純および結合共振の主および副不安定領域が生ずる。ただし、結合共振は和形のみのみ存在し、 $\omega_1 + \omega_2$ および $\omega_1 + \omega_3$ のように対称振動間または並列相対振動間の結合共振は存在するが、 $\omega_1 + \omega_4$ のように対称振動間と並列相対振動間の結合共振は存在しない。図-2,3の並列相対加振の場合には2次の非線形項が含まれないので、本質的に

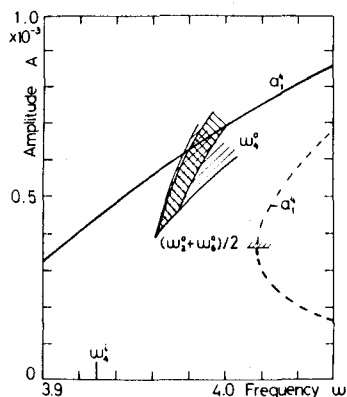


図-3 図-2のつぎ、4次並列相対振動近傍の面外不安定領域

に弦と同じ特性を持つが、この場合行列 $[D_1]$ の要素がゼロとなるために、 $k=1$ に対応する主不安定領域は存在しない。不安定領域の幅が広い場合が重要で、面外振動が生ずる可能性が高い。不安定領域の幅は行列 $[D_1] \sim [D_3]$ の要素の大きさによって定まる。対称加振の場合 $\omega = 3.7$ および並列相対加振の場合 $\omega = 2.0$ 付近の1次振動の共振点近傍の単純共振の幅が最も広い。単純共振のみ結合共振よりも不安定領域が広いと言える。

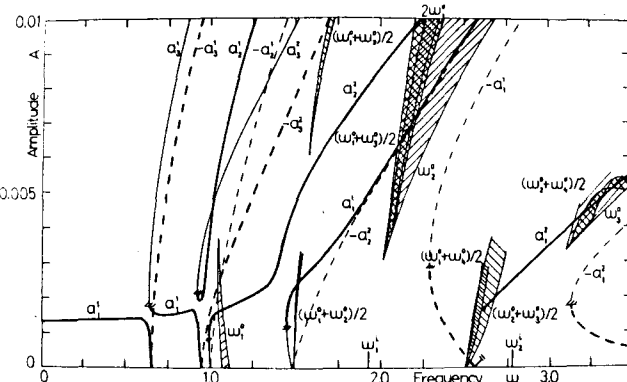


図-4 傾斜T-プル ($\theta = 30^\circ$) の面内加振による応答および面外不安定領域

図-4はサグ比 $\gamma = 0.1$ 、 $k = 30$ および $\theta = 30^\circ$ の傾斜T-プルの応答曲線と不安定領域である。傾斜T-プルでは面外対称振動と並列相対振動に分離することとが不可能であるので、結合共振はすべての振動形が連成することになる。サグのない弦との比較は譲渡時に発表する。なお、不安定振動が生じた後の振幅は本稿では決定することと無理で、非線形分岐応答解析によらなければならない。

参考文献 1) 高橋他：長崎大学工学部研究報告、第16号、昭和56年7月、2) 山口他：土木学会第36回年次学術講演会講演概要集、第1部、昭和56年10月、3) 金近他：本概集第I-17