

大分工業高等専門学校 正会員 島田 晋

§1. まえがき 水域等における混合現象の解明には、まず水域における流動特性を知る事が重要であるが、ここでは流体粒子の速度の確率分布が正規分布で与えられる二つのガウス過程について、確率過程として解析され、確率方程式と拡散方程式の対応が示される。ガウス過程は結合正規であるので、位置と速度に関する平均と分散・共分散の経時変化が求められる。最初の例では速度が Wiener-Lévy (ブラウン運動) 過程に従い、リチャードソンの 4/3 乗則として知られる相対拡散模型が構成される。次の例は粒子の速度に比例する抵抗が働くマルコフ型の相関を有する場合であり、Langevin 方程式に基づいて Ornstein-Uhlenbeck 過程とよばれている現象が解析される。そして Lagrange のスペクトル関数についても言及され、確率過程に対し物理的意味づけが行われる。

§2. 相対拡散模型 はじめの例として拘束されない粒子で速度が無数の「微細な」ランダムな衝撃に支配されるような現象

< Relative Diffusion Model > 象の (1次元) の運動を考

$$(1) \quad dU(t) = dB(t)$$

$$(2) \quad U(t) = U(0) + \int_0^t dB(\theta)$$

$$U(0) \equiv u_0$$

$$(3) \quad X(t) = X(0) + \int_0^t U(\theta) d\theta$$

$$X(0) \equiv x_0$$

$$(4) \quad E\{U(t)\} = u_0$$

$$(5) \quad \text{Var}\{U(t)\} = \alpha \cdot t$$

$$(6) \quad E\{X(t)\} = x_0 + u_0 \cdot t$$

$$(7) \quad M(i\phi, i\psi) = \langle \exp[i\phi X(t) + i\psi U(t)] \rangle$$

$$(8) \quad \ln\{M(i\phi, i\psi)\} = x_0(i\phi) + u_0(i\psi + i\phi t)$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \int_0^t [i\psi + i\phi(t-\theta)]^2 d\theta$$

$$= x_0(i\phi) + u_0(i\psi + i\phi t)$$

$$+ \frac{\alpha}{2} [(i\psi)^2 t + (i\psi)(i\phi)t^2 + \frac{(i\phi)^2 t^3}{3}]$$

$$(9) \quad \text{Cov}\{X(t), U(t)\} = \alpha/2 \cdot t^2$$

$$(10) \quad \text{Var}\{X(t)\} = \alpha/3 \cdot t^3$$

$$(11) \quad \frac{\partial M}{\partial t} = i\phi \frac{\partial M}{\partial i\psi} + \frac{\alpha}{2} (i\psi)^2 \cdot M$$

$$(12) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial u^2}$$

$$(13) \quad D(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\text{Var}\{X(t)\}]$$

$$= \text{Cov}\{X(t), U(t)\}$$

$$= \text{Var}\{X(t)\}^{2/3}$$

$$(14) \quad c(x, u) = \frac{\exp\left\{-\frac{u^2}{2\alpha t} - \frac{6(x-ut/2)^2}{\alpha t^3}\right\}}{\pi/\sqrt{3} \cdot \alpha t^2} \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{2}{\alpha t}\left(u - \frac{3x}{2t}\right)^2 - \frac{3x^2}{2\alpha t^3}\right\}}{\pi/\sqrt{3} \cdot \alpha t^2}$$

える。U(t) を粒子の速度、

B(t) を平均ゼロ分散有限の

正規加法過程 (ブラウン運

動) とすれば、これらを結ぶ確率方

程式は (1) で表わされる。これを積分すれば (2) が得られるが、ここで

の積分は確率積分を意味する。速度の積分より粒子の位置を示す X(t) が (3) のよ

うになる。ランダムな衝撃の積分 B(t) の性質から、速度の平均と分散

が (4) と (5) のように求められる。ここに α は $dB(t)/dt$ の Lagrange ス

ペクトルを示す。つまり速度は平均が初速に等しく、分散が経過時間

に比例して増加する正規分布となる過程である。また位置の平均は平

均速度の積分として (6) になる。ここで X(t) と U(t) の同時分布を求め

るために特性関数 (7) によって解析をすすめる。確率論の知識により、

正規加法過程によって構成される

過程のキュムラント関数が (8) の

ように計算される。これをパラメ

ーター種と ψ で微分することによ

り共分散が (9)、位置の分散が (10)

のように導びかれる。またこれら

の関係をも特性関数に関する微

分方程式で書けば (11) で表わ

され、同時確率密度 $c(x, u)$ に

ついての位相空間における連

続方程式が (12) のように見出される。次に分散係数は (13) で示されるように位置の標準偏差の 4/3 乗に比例し、このことより相対拡散模型が構成されたことが分る。X(t) と U(t) の同時確率密度は (14) となり、これは α に垂直な方向の流速分布が $u=0$ であるような場における α 方向の拡散を

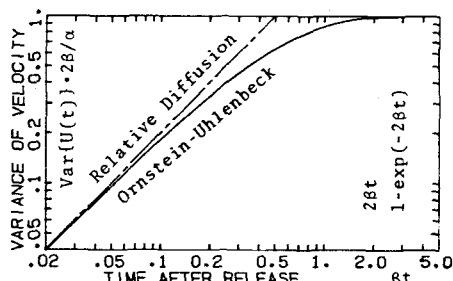


FIG.1 Var{U(t)} from (5) & (22)

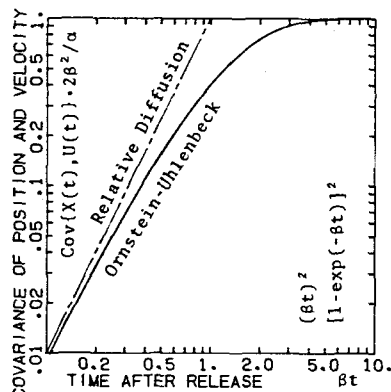


FIG.2 Cov{X(t), U(t)} (9) & (23)

< Ornstein-Uhlenbeck Process >

$$(15) dU(t) + \beta \cdot U(t) \cdot dt = dB(t)$$

$$(16) V(t) = U(t) \cdot \exp(\beta \cdot t)$$

$$(17) dV(t) = \exp(\beta \cdot t) \cdot dB(t)$$

$$(18) V(t) = u_0 + \int_0^t \exp(\beta \cdot \theta) \cdot dB(\theta)$$

$$(19) E\{U(t)\} = u_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t)$$

$$(20) E\{X(t)\} = x_0 + \frac{u_0}{\beta} [1 - \exp(-\beta t)]$$

$$(21) \ln\{M(i\phi, i\psi)\} = x_0 \cdot (i\phi)$$

$$+ u_0 \{i\psi \exp(-\beta t) + \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta / (i\phi)}\}$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \int_0^t \{i\psi \exp[-\beta(t-\theta)] + \frac{1 - \exp[-\beta(t-\theta)]}{\beta / (i\phi)}\}^2 d\theta$$

$$= u_0 \{i\psi \exp(-\beta t) + \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta / (i\phi)}\}$$

$$+ \frac{\alpha}{4\beta} (i\psi - \frac{i\phi}{\beta})^2 [1 - \exp(-2\beta t)]$$

$$+ \frac{\alpha}{8\beta^2} (i\psi - \frac{i\phi}{\beta}) i\phi [1 - \exp(-\beta t)]$$

$$+ \frac{\alpha}{2\beta^2} (i\phi)^2 t + x_0(i\phi)$$

$$(22) \text{Var}\{U(t)\} = \frac{\alpha}{2\beta} [1 - \exp(-2\beta t)]$$

$$(23) \text{Cov}\{X(t), U(t)\} = \alpha / 2\beta^2 \cdot [1 - \exp(-\beta t)]^2$$

$$(24) \text{Var}\{X(t)\} = \alpha / 2\beta^3 \cdot [2\beta t - 3 + 4\exp(-\beta t) - \exp(-2\beta t)]$$

$$(25) \frac{\partial M}{\partial t} = (i\phi - \beta i\psi) \frac{\partial M}{\partial i\psi} + \frac{\alpha}{2} (i\psi)^2 M$$

$$(26) \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \beta \frac{\partial}{\partial u} (uc) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial u^2}$$

in FIG.4 : $U_m = 6\beta L$, $\alpha = 2\beta^3 L^2$

< Power Spectrum of Velocity >

$$(27) S(\omega) = \frac{\alpha}{\omega^2 + \beta^2} \sim \frac{\alpha}{\omega^2}$$

< Autocorrelation of Velocity >

$$(28) R(\tau) = \frac{\alpha}{2\beta} \exp(-\beta|\tau|) \sim \frac{\alpha}{2} |\tau|$$

無視した拡散方程式の解と同じものである。そしてこの分散雲が平均流速 U_m で移動したときの固定点での観測例を FIG.4 の破線で示す。分散雲の拡散速度が移動速度よりも大きく、正規分布の形状から非常に歪んだ濃度時間曲線となっている。

§3. Ornstein-Uhlenbeck過程

次に粒子の速度に比例するような抵抗と不規則な揺動も同時に受ける運動をとり上げる。この運動は(15)のような確率微分方程式(Langevin方程式)で表現される。ここで(16)を用いて $U(t)$ から $V(t)$ に書き換えると、(15)は(17)となり $V(t)$ は形式的に(18)で表わされる。従って速度の平均は(19)で、位置の平均は(20)の

ように見出される。そして前節と類似の計算によってキュムラント関数が得られる。よって速度の分散が(22)で、位置と速度の共分散が(23)で、及び位置の分散が(24)と求められる。この現象は $\beta t \ll 1$ のとき相対拡散模型で表わされ、 $\beta t \gg 1$ になると分散係数が一定のFick型の拡散現象に漸近する。 $1/\beta$ はLagrangeの積分時間である。これらの変化の状態が FIG.1~3 により示されている。また特性関数についての微分方程式が(25)で表わされ、同時確率密度に関する方程式が(26)のように得られる。そして位置と速度の同時確率密度は二次元正規分布となり、この分散雲が平均流速 U_m で移動したときの平均濃度の経時変化を FIG.4 の実線で示す。図では分散係数が一定に近い領域となり正規曲線に類似している。

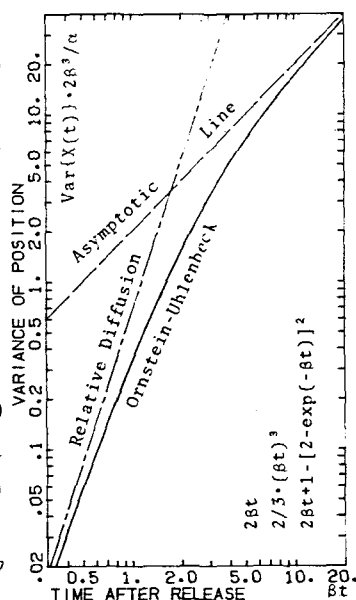


FIG.3 $\text{Var}\{X(t)\}$ (10) & (24)

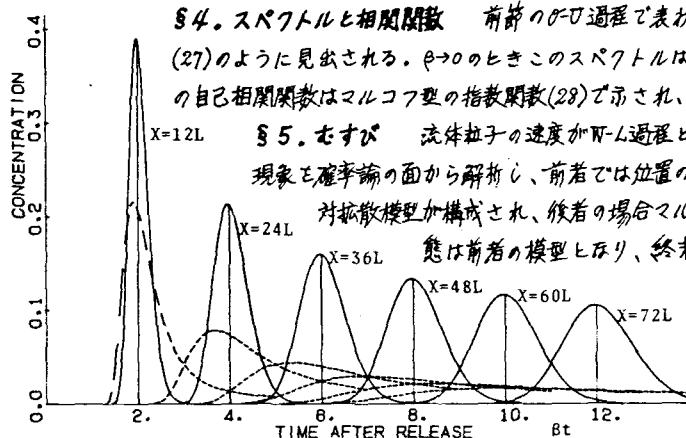


FIG.4 CHANGE OF CONCENTRATION AT FIXED POINT (ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS AND RELATIVE DIFFUSION)

§4. スペクトルと相関関数

前節のO-U過程で表わされる速度のLagrangeスペクトルは(27)のように見出される。 $\beta \rightarrow 0$ のときこのスペクトルは波数 ω の-2乗に比例する。また速度の自己相関関数はマルコフ型の指数関数(28)で示され、O-U過程の特徴を表現している。

§5. おすび

流体粒子の速度がW-L過程とO-U過程に依る場合について、拡散現象も確率論の面から解析し、前者では位置の分散が経過時間の3乗に比例し、相対拡散模型が構成され、後者の場合マルコフ型の速度相関を有し、初期の状態は前者の模型となり、終末では分散係数一定の正規拡散に漸近する。またLagrangeスペクトルと相関関数も示された。

< 参考文献 >

- 津村他訳「確率過程入門」東京大学出版会
- 平岡他訳「応用確率論」東海大学出版会
- 堀澤一著「ランジュバン方程式」岩波書店
- 佐藤平八訳「フーリエ解析」森北出版