103 —(17)　　波による浮体運動の有限要素法解析

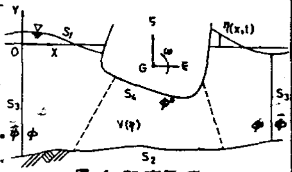
熊本大学　工学部　正員　○滝川　清
熊本大学　工学部　正員　　田渕　幹修

1. はじめに

浅海域に繋留または浮遊した物体の運動を考える場合、特に運動の共振点近傍においては、波と浮体との相互の運動の有限振幅性を考慮する事が重要である。本報告は、この、波－浮体の相互の運動系に有限要素法を用い任意海底形状領域での任意断面形状浮体の有限振幅運動および微小振幅運動の各場合についての計算方法を示すものである。

2. 有限振幅非定常運動解析

図－1 に示す様な解析領域 $V(\eta)$ での流体運動について考える。$V(\eta)$ は表面変動量 η の関数である。この場合、ある時刻 t での汎関数 χ は次式のように表現できる。



図－1 解析領域

$$\chi=\frac{1}{2}\iint_{V(\eta)}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\}dV+\frac{g}{2}\int_{S_1}\eta^2 dS_1+\int_{S_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\eta\, dS_1$$
$$-\int_{S_1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\phi\, dS_1-\int_{S_3}\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}\right)\phi\, dS_3-\int_{S_4}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial n}\right)\phi\, dS_4 \quad \cdots\cdots(1)$$

これを η および速度ポテンシャル ϕ に関し第１変分を取ると次式を得る。

$$d\chi=-\iint_{V(\eta)}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\delta\phi\cdot dV+\int_{S_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-n_y\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\delta\phi\cdot dS_1$$
$$+\int_{S_1}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\}+g\eta\right]\delta\eta\cdot dS_1+\int_{S_2}\frac{\partial\phi}{\partial n}\delta\phi\cdot dS_2$$
$$+\int_{S_3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}\right)\delta\phi\cdot dS_3+\int_{S_4}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{\partial\phi'}{\partial n}\right)\delta\phi\cdot dS_4 \quad \text{―}(2)$$

すなわち、式(1)の汎関数を停留にする条件として有限振幅運動系の流体域での基礎式を全て同時に得る事ができる。解析は、有限要素法を用いて式(1)の空間方向での離散化を行ない、上記の変分原理を適用する。

いま、解析領域を三角形要素群に分割し、１つの要素内の ϕ をその節点値 $\Phi^T=[\phi_i,\phi_j,\phi_m]$ で表現する。

$$\phi=[N]\Phi\ ,\ \frac{\partial\phi}{\partial x}=\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]\Phi=B^T\Phi,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=C^T\Phi \quad \cdots(3)$$

また、境界 S_1, S_2, S_3, S_4 での諸量は各境界面上の節点値を用いて次式のように表現する。

$$\phi=[N_s]\Phi,\ \eta=[N_s]\eta\ ,\ \frac{\partial\phi}{\partial t}=[N_s^*]\frac{\partial\Phi}{\partial t},\ \frac{\partial\eta}{\partial t}=[N_s^*]\frac{\partial\eta}{\partial t}$$
$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}=[N_s^*]\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n},\ \frac{\partial\phi'}{\partial n}=[N_s^*]\frac{\partial\Phi'}{\partial n} \quad \cdots\cdots(4)$$

ここに、＊印は変分を受けない事を意味する。

式(3)、式(4)を用いると式(1)の汎関数は有限個の節点値で表現され、これに変分原理を適用すると、$\delta\Phi$, $\delta\eta$ に関する停留条件より次の２つの式を得る。

$$\sum_V(BB^T+CC^T)\Phi\cdot\Delta-\sum_{S_1}S^*\left\{n_y\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\}-\sum_{S_3}S^*\left\{\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}\right\}-\sum_{S_4}S^*\left\{\frac{\partial\Phi'}{\partial n}\right\}=0 \quad \cdots(5)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\sum_V\Phi^T(BB^T+CC^T)\Phi\Delta\right]+\frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\sum_{S_1}\eta^T S\eta\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\sum_{S_1}\eta^T S^*\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\}\right]=0 \quad \cdots(6)$$

ここに、$S=\int_e[N_s]^T[N_s]dS$, $S^*=\int_e[N_s]^T[N_s^*]dS$

しかし、解析領域 $V(\eta)$ は η の関数であり、また、浮体没水表面は浮体変位量の関数である。従って、境界 S_1 および S_4 に関係する要素の形状係数には、これ等の未知な変動量が含まれ上記の式は非線形な多元連立方程式である。　そこで、増分法を導入し線形化を図る。すなわち、ある時刻 t での第 n 近似解が既知であるとして、その第 $n+1$ 近似解を次のように表わす。

$$\Phi^{n+1}=\Phi^n+d\Phi\equiv\Phi_0+d\Phi\ ,\quad \eta^{n+1}=\eta^n+d\eta\equiv\eta_0+d\eta \quad \cdots(7)$$

図－２に示す様に自由表面境界 S_1 に関し式(7)の増分量を用いると非線形な形状係数は以下のように書き改められる。

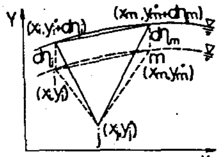


図-2 自由表面要素

$$B=B_0+B_1 d\eta,\ \ C=C_0+C_1 d\eta$$
$$S=\frac{1}{3}(l_0+L_1^T d\eta)(S_0+N_1 d\eta S_1+N_1 d\eta N_1 d\eta S_3)$$
$$S^*=\frac{l_0}{3}(S_0+N_1 d\eta S_1+L_1^T d\eta S_0/l_0) \quad \cdots(8)$$

これ等のマトリックスについては文献1),2)を参照されたい。

一方、図－３に示す浮体没水表面境界 S_4 に関しては以下のようになる。没水表面上節点 (x^n, y^n) が第 n 近似解から dx, dy だけ変位するとき、すなわち

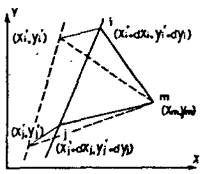


図-3 没水表面要素

$$x^{n+1}=x_0^n+dx,\quad y^{n+1}=y_0^n+dy \quad \cdots(9)$$

この増分表示を用いると、これに関係する非線形な形状係数は以下の如く表現できる。

$$B=B_0+B_2 dX+B_1 dY\ ,\ \ C=C_0+C_2 dX+C_1 dY \quad \cdots(10)$$

ここに、$dX^T=\{dx_i, dx_j, 0\}$, $dY^T=\{dy_i, dy_j, 0\}$ である。

この dX, dY は浮体の運動量で決定される。　いま、浮体の静止位置での座標を $\bar{G}(\bar{x}_G,\bar{y}_G)$, 静止位置からの浮体の

水平、鉛直および回転の各変位を ξ, ζ, ω とすると、浮体静止のとき重心から $(\bar{x}, \bar{y})$ だけ離れた没水表面上節点 (x^*, y^*) は次式で表現できる。

$$x^* = \bar{x}_q + \xi + \bar{x}\cos\omega - \bar{y}\sin\omega \ , \ y^* = \bar{y}_q + \zeta + \bar{x}\sin\omega + \bar{y}\cos\omega \quad \cdots\cdots(11)$$

これに、次式(12)で示す運動の増分表示を行なうと、結局、dx, dy は式(13)の表現を得る。

$$\xi^{n+1} = \xi_0 + d\xi \ , \ \zeta^{n+1} = \zeta_0 + d\zeta \ , \ \omega^{n+1} = \omega_0 + d\omega \quad \cdots\cdots(12)$$

$$d\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} dx_i \\ dx_j \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 , & 0 , & -(\bar{x}_i\sin\omega_0 + \bar{y}_i\cos\omega_0) \\ 1 , & 0 , & -(\bar{x}_j\sin\omega_0 + \bar{y}_j\cos\omega_0) \\ 0 , & 0 , & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\zeta \\ d\omega \end{Bmatrix} \equiv \mathbb{U}d\mathbb{S}$$

$$d\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} dy_i \\ dy_j \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 , & 1 , & \bar{x}_i\cos\omega_0 - \bar{y}_i\sin\omega_0 \\ 0 , & 1 , & \bar{x}_j\cos\omega_0 - \bar{y}_j\sin\omega_0 \\ 0 , & 0 , & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\zeta \\ d\omega \end{Bmatrix} \equiv \mathbb{V}d\mathbb{S} \quad \cdots\cdots(13)$$

よって、没水表面に関係する非線形な形状係数は

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 + (\mathbb{B}_2\mathbb{U} + \mathbb{B}_1\mathbb{V})d\mathbb{S} \ , \ \mathbb{C} = \mathbb{C}_0 + (\mathbb{C}_2\mathbb{U} + \mathbb{C}_1\mathbb{V})d\mathbb{S} \quad \cdots\cdots(14)$$

以上、式(5)、式(6)に増分法を導入して式(8)、式(14)を用いれば、考える流体域での線形化された多元連立方程式を得る。

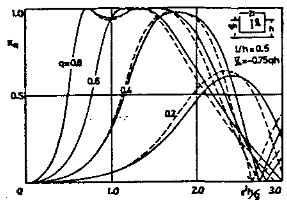


図-4 (a) 反射率

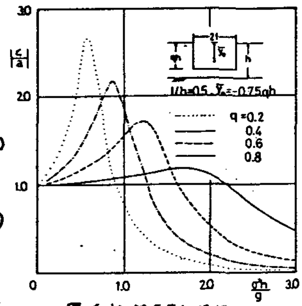


図-4 (b) 鉛直運動振幅

図-4 自由浮体運動

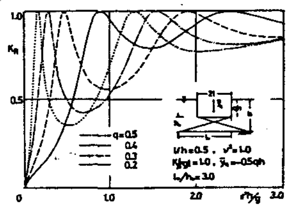


図-5 (a) 反射率

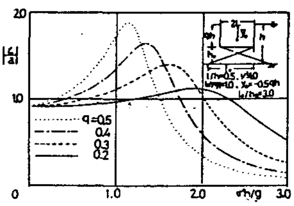


図-5 (b) 鉛直運動振幅

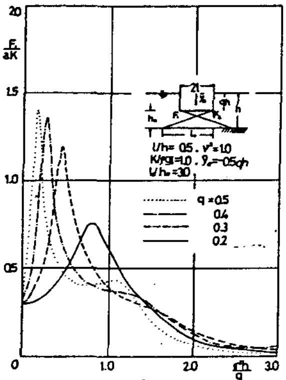


図-5 (c) 係留力

図-5 係留浮体運動

一方、浮体の運動方程式は、M を浮体質量、I を重心に関する慣性能率として、

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \int_{S_4} P_H dS_4 - (k_{xx}\xi + k_{xy}\zeta + k_{x\omega}\omega) \ , \ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \int_{S_4} P_V dS_4 - (Mg + T_V) - (k_{yx}\xi + k_{yy}\zeta + k_{y\omega}\omega)$$

$$I\frac{d^2\omega}{dt^2} = \int_{S_4} P_M dS_4 - (k_{\omega x}\xi + k_{\omega y}\zeta + k_{\omega\omega}\omega) \quad \cdots\cdots(15)$$

ここで、k_{xx}, k_{xy} 等は係留索の各方向変位量に対応するバネ定数、T_V は静止状態での索張力の鉛直方向成分。P_H, P_V はそれぞれ水平および鉛直方向の流体圧であり、P_M は流体圧による浮体重心に作用するモーメントである。ここで、流体圧 p は三角形要素の節点値を用いて、$p = -\rho\left[[N]\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\} + \frac{1}{2}\Phi^T(\mathbb{B}\mathbb{B}^T + \mathbb{C}\mathbb{C}^T)\Phi + gy\right] \quad \cdots\cdots(16)$

すなわち、式(15)の運動方程式も速度ポテンシャルおよび浮体の変位量で表わせる。先と同様に増分法を用いて線形化を行ない、流体域での方程式と連立させると結局、$d\Phi, d\eta, d\xi, d\zeta, d\omega$ を未知量とした多元連立方程式を導出できる。また、時間方向には差分法を用いて計算を進め、浮体の幾何学的形状は逐次 $x^* = x_0 + dx$、$y^* = y_0 + dy$ と、没水表面の移動を行なう事によって満足される。以上の方法より、有限な浮体の運動と有限振幅の波を同時に計算できる。

3．微小振幅定常運動解析　微小運動をする浮体と波動の解析に際して、解析領域 V は固定され、流体および浮体運動の非線形項は無視される。この場合、停留化すべき汎関数は次式のように表現できる。

$$\chi = \iint_V \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right\} dV + \frac{1}{g}\int_{S_1}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)\Phi dS_1 - \int_{S_3}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}\right)\Phi dS_3 - \int_{S_4}\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial n}\right)\Phi dS_4 \quad \cdots\cdots(17)$$

変分を受ける独立量は Φ のみであり、この汎関数を停留にする条件として、微小振幅運動系の流体域での基礎式が全て得られる。これに、2.と同様、有限要素法を用いて離散化を行ない変分原理を適用すると結局次式を得る。

$$\sum_V(\mathbb{B}\mathbb{B}^T + \mathbb{C}\mathbb{C}^T)\Phi\cdot\Delta + \frac{1}{g}\sum_{S_1}\mathbb{S}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right\} - \sum_{S_3}\mathbb{S}\left\{\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}\right\} - \sum_{S_4}\mathbb{S}\left\{\frac{\partial\Phi^*}{\partial n}\right\} = 0 \quad \cdots\cdots(18)$$

運動の周期性を考えて、$\Phi = \phi e^{i\sigma t}$、$\bar{\Phi} = \bar{\phi} e^{i\sigma t}$、$\Phi^* = \phi^* e^{i\sigma t}$ なるポテンシャル関数を用いると次式を得る。

$$\sum_V(\mathbb{B}\mathbb{B}^T + \mathbb{C}\mathbb{C}^T)\phi\cdot\Delta - \frac{\sigma^2}{g}\sum_{S_1}\mathbb{S}\phi - \sum_{S_3}\mathbb{S}\left\{\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}\right\} - \sum_{S_4}\mathbb{S}\left\{\frac{\partial\phi^*}{\partial n}\right\} = 0 \quad \cdots\cdots(19)$$

これと、式(15)で表現される浮体の運動方程式とを連立して解けば良い。　図-4，図-5 にこの方法による計算例を示す。(図-4 (a) 中の破線は井島の方法[3] による。)　なお、他の結果については講演時に発表の予定である。

参考文献 1) 滝川清・田渕幹修；有限要素法による波動解析について、第25回海講論文集 pp.28～32，1978.
2) 滝川清・田渕幹修；有限要素法による浅海域での波動解析について、第1回流れの有限要素法解析シンポジウム pp.61～68，1979.
3) 井島武士・田渕幹修・湯村やす；有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の変形，土木学会論文報告集 第202号，1972.
4) 滝川清・田渕幹修；有限要素法による波動解析について ―運動する境界面を有する場合―，第27回海講論文集 pp.1～5，1980