

九州大学工学部 正員 上田 年比古

・ 神野 健二

○ 柳井 和朗

まえがき. 河川や沿岸域における移流分散現象の解明は水域の水質保全対策上重要な問題として、従来より数多く研究されている。剪断流、往復流の移流分散係数の評価¹⁾あるいは注入物質の空間分布の経時変化の研究^{2),3)}は移流分散現象の基本的性質さらにはより局所的な性質の解析を目的としているものと言えよう。ところで、このような移流分散の数値計算に適用される差分法には従来より種々提案されているが⁴⁾、N.Yotsukuraら⁵⁾が述べているように移流項が卓越する剪断乱流中での拡散に対してはこの項で発生する離散化誤差が問題となる。本報では、粒子移動法⁶⁾により2次元移流分散方程式を数値計算し、適用上の問題点についてより検討した。

計算方法について. 次の方程式を考える。 $\partial C/\partial t + u\partial C/\partial x = \partial C/\partial t = \partial(K_x \partial C/\partial x)/\partial x + \partial(K_y \partial C/\partial y)/\partial y$... (1)

図-1のように固定格子点 (i, j) の領域 $S_{ij} = [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}] \times [y_j - \frac{\Delta y}{2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}]$ で

表す。ここに $\Delta x, \Delta y$ は固定格子差分間隔、 (x_i, y_j) は (i, j) 点の x, y 座標である。記

号 $[\cdot]$ は座標区間を表す。いま、 S_{ij} に含まれる粒子 K の濃度 $C^K(K)$ (K はtime step)の算術平均値を $\bar{C}_{ij}^n$ とする。各格子点について算術平均値を求め、式(1)の後の式を次のように離散化する。

$$\delta \bar{C}_{ij}^n = \Delta t \left[K_x (\bar{C}_{i+1,j}^n - 2\bar{C}_{ij}^n + \bar{C}_{i-1,j}^n) / \Delta x^2 + (K_x(u_{i+1}) - K_x(u_{i-1})) \times (\bar{C}_{i+1,j}^n - \bar{C}_{i-1,j}^n) / 4\Delta x^2 + K_y (\bar{C}_{i,j+1}^n - 2\bar{C}_{ij}^n + \bar{C}_{i,j-1}^n) / \Delta y^2 + (K_y(y_{j+1}) - K_y(y_{j-1})) \times (\bar{C}_{i,j+1}^n - \bar{C}_{i,j-1}^n) / 4\Delta y^2 \right] \quad \dots (2)$$

次に図-1に示す粒子 K は固定格子点 (i, j) の座標 (x_i, y_j) と変位 $\xi = x_i - x^K(K)$,

$\eta = y_j - y^K(K)$ (ここに、 $x^K(K)$, $y^K(K)$ は粒子 K のtime step n における x, y 座標)を生じているので、 $\delta \bar{C}_{ij}^n$ を修正する

必要がある。例えは粒子 K が領域 S_{ij} の第1象限にあるときには、 $\delta C(x^K(K), y^K(K)) = \delta \bar{C}_{ij}^n + \partial \delta C / \partial x|_{i,j}^n \cdot \xi + \partial \delta C / \partial y|_{i,j}^n \cdot \eta$... (3), ここに ∂ 記号は右側 $(y$ 方向)については上側微分を表す。ex. $\partial \delta C / \partial x|_{i,j}^n = (\delta \bar{C}_{i+1,j}^n - \delta \bar{C}_{i,j}^n) / \Delta x$ etc. したがって粒子 K の新しいtime stepでの濃度は $C^{n+1}(K) = C^n(K) + \delta C(x^K(K), y^K(K))$... (4), また (i, j) 点の濃度は $\bar{C}_{ij}^{n+1} = \bar{C}_{ij}^n + \delta \bar{C}_{ij}^n$... (5) で計算される。次に、新しいtime stepでの粒子位置は $x^{n+1}(K) = x^n(K) + u(K)\Delta t$ (式(1)で $u\partial C/\partial x$ の項も考えるときには $y^{n+1}(K) = y^n(K) + U(K)\Delta t$) で計算する。計算のフローチャートは図-2に示す。この計算法で生じる離散化誤差は非定常項と右辺の拡散項である。

後者のオーダーは前報で検討しているように $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ であるが、通常 α 中心差分式に比べて1.5倍程度大きく、したがって拡散項が卓越する場合には不利となり検討を要する。移流項については、本法が個々の粒子の特性曲線上の濃度変化を計算する方法であるから問題は無いと言えよう。なお、N.Yotsukuraらは、閉水路の移流分散simulationで、移流項の誤差防止のため、深さごとに特性曲線上で移流項を計算しているが、基本的には粒子法と同じ考え方といえる。もしながら、この方法では流れが一方向でない場合、各点ごとに特性曲線を考えなければならず、計算が面倒になるものと考えらる。

計算例(1). 流速分布には対数分布を用いた: $\frac{u-\bar{u}}{u_*} = 2.5 + 2.5 \ln(y/R)$... (6), $h=20$ cm, $\bar{u}=5.0$ cm/s, $u_* = 0.48$ cm/s, $\Delta x=6.0$ cm, $\Delta y=1$ cm, $\Delta t=0.5 \times (\Delta x/u_{max}) = 0.4838$ sec, x 方向の乱流拡散係数: $K_y(y)/R u_* = \{(h-y)/R\}^{2.5} / 2.5$... (7) とした。P.C.Chatwin⁷⁾によると移流分散係数の評価には粘性底層を考慮する必要があり、数値計算においてもこの効果をモデルを作る必要があろう。粘性底層の厚さ $\delta = 5\nu/u_* \approx 5 \times 0.01/0.48 \approx 1.0$ mmとすると $\Delta y=1.0$ cmよりも十分に小さいから、ここでの計算例では粘性底層の効果は含まれていないことになる。

図-3には $t=0$ secで、 Δx 区間に水深方向に一様に分布したtracerの経時変化を示している。差分間隔の制約 α が、

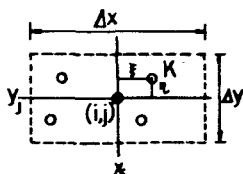


図-1 (i, j) 領域内の粒子(白丸)

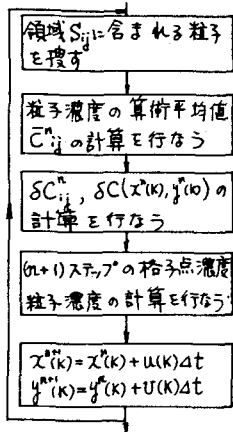


図-2 計算のフローチャート

十分に滑らかな等濃度

線になっていないが、時間の経過とともに流れの効果が発生する様子が理解できる。

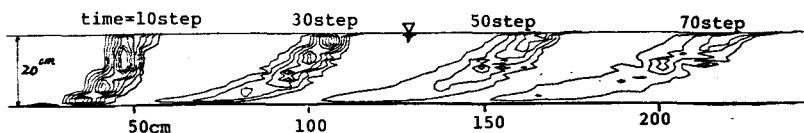


図-3 濃度分布の経時変化

図-4には断面平均濃度 $\bar{C}(x,t)$ の分散 $\sigma_x^2(t)$ に moment 法 ; $\sigma_x^2(t) = \left\{ \frac{\sum C(x-\bar{x})^2 \Delta x}{\sum C \Delta x} \right\}$

…(8)によ、て求めてプロットした。移流分散係数 $D(t)$ は

$$D(t) = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_x^2/dt}{dt} \text{ で計算される。図中の勾配(b)を計算し、} D(t) \text{ を求めると、} D(t) \approx 36 \text{ cm}^2/\text{sec} \text{ となった。J. W. Elder による解析結果 ; } D = 5.93 \text{ kU} \text{ を用$$

いると $D \approx 57 \text{ cm}^2/\text{sec}$ となり、勾配(a)のように示さる。この差異は、時間が十分に経過していないこと他、数値計算にともなう離散化誤差(特に水深方向の差分化で生じる誤差)の影響が含まれているのではなからうかと思われる。今後検討を要しよう。

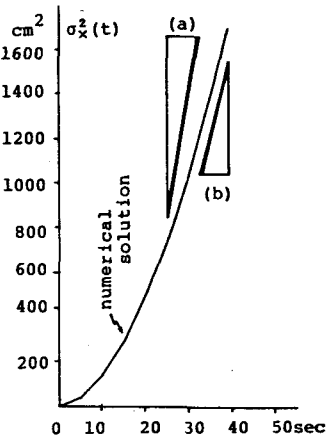


図-4 $\sigma_x^2(t)$ の時間変化

計算例(2) 図-5には、ケース(a) $14 \leq y \leq 20 \text{ cm}$, $18 \leq x \leq 24 \text{ cm}$, ケース(b) $8 \leq y \leq 14 \text{ cm}$, $18 \leq x \leq 24 \text{ cm}$, ケース(c) $0 \leq y \leq 6 \text{ cm}$, $18 \leq x \leq 24 \text{ cm}$ に 100%の初期濃度分布を与えた場合の計算例を示している。t=0での水深方向の濃度勾配が急で拡散項での離散化誤差が大きいため、等濃度線(5%きざみで描いている)の算定結果の精度は必ずしも良好でないが、放流位置が異なると濃度分布の広がりも様子がかなり違って来るようである。

結び 本報では、剪断流のように移流効果の大きい流水の場合における拡散現象と粒子移動法によって数値計算したが、適用上①定量的検討ができる計算例を精度良く求める②拡散項の離散化誤差、表裏、初期濃度分布に依じた合理的差分間隔・粒子個数の選択③計算スケールを小さくし

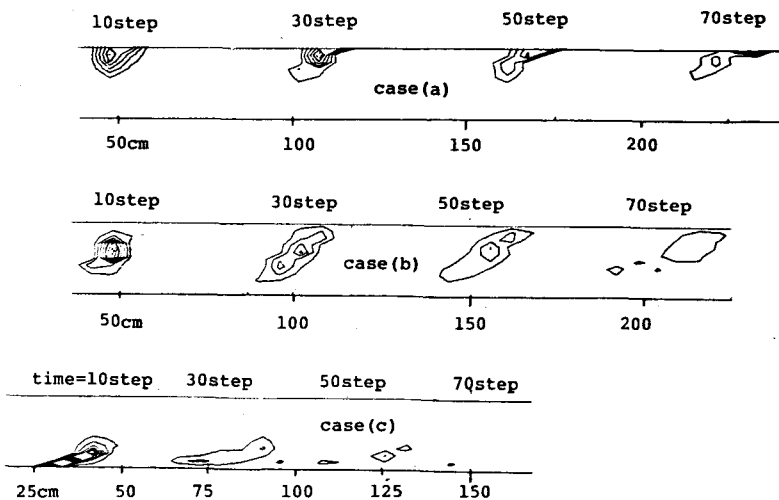


図-5 放流位置が濃度分布の経時変化に及ぼす影響

て、P.C.Chalwinのいう粘性底層の効果の検討、などの問題点が考えられた。今後はこのような問題の他に、種々の流況下での移流分散現象についても検討を加えたい。

- 参考文献** 1) 福岡達二, 交通流中の物質の分散, 第19回本理講演会, pp.155~160 2) 島田晋, 移流分散現象の確率論的解析, 第24回本理講演会, pp.1~6 3) Y. Iwasa & S. Aya, Transfer Processes In Open Channel Flows, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics (1980, Tokyo). pp.539~550 4) 数値解析(坪倉編), サイエンス社 (BB50年) pp.59~72 5) N. Yotsukura & M.B. Fiering, Numerical Solution to a Dispersion Equation, ASCE, HY-5, (1964) pp.83~104 6) 神野・上田, 粒子の移動による移流分散方程式の数値解法の検討, 土木学会論文集第271号(1978) pp.45~53 7) P.C. Chalwin, Interpretation of longitudinal dispersion experiments, J. Fluid Mech., (1971) pp.689~702