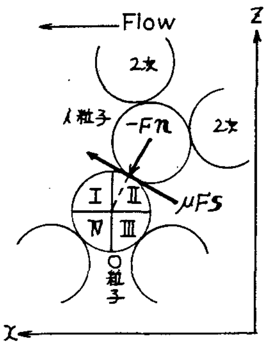
102—(17)　土石流における粒子間応力

九州大学　工学部　正　員　○橋本　晴行
九州大学　工学部　正　員　　椿　東一郎
九州大学　工学部　学生員　　山本　行範

砂礫粒子を高濃度に含有する水－粒状体系の土石流においては、粒子相互の接触によって発生する粒子間応力が土石流の流動を規定する力である。この粒子間応力については、Bagnold[1]の先駆的研究をはじめとして、最近では水を含まない粒状体の流れについての理論的研究が行なわれつつあるが、少なくとも土石流への適用性に関してみるならば、Bagnold の域を出るものはないようである。高橋[2]は、Bagnold の研究をもとに、土石流の流動に関する諸問題を統一的に説明しようと試みているが、必ずしもそれに成功しているとは言い難い。従って本研究は、この不成功を Bagnold の応力表示式によるものであると考え、土石流の粒子相互の接触機構を繰り込んだ粒子間応力を求めようとするものである。



図－1　0, i 粒子の衝突の模式図

粒子相互の接触機構

既に、発表したように[3]、土石流のような水－粒状体系のせん断流においては、粒子の大部分は、相対的に下層の粒子に対してⅢ象限で接触を開始し、反発することなく乗り上げた後、Ⅰ象限で分離していく（図－１）。従って、土石流では粒子が相互に接触した状態で連なりあい、多体粒子系を構成し、粒子間力として、粒子相互が接触した瞬間に作用する力と乗り上げる時に作用する力とに大別できることが分った。そして前者は衝突力であるとみなし、これによる応力を衝突応力と呼び、後者は衝突力で支えきれない粒子の水中重量によって発生する静的な力であるとみなし、これによる応力を接触応力と呼ぶことにする。

粒子間応力

(1)　衝突応力　前報においては[3]、粒子間の衝突は巨視的な流れの速度勾配によるものであると考え、衝突応力は次式で求められた。

$$\tau_{ik}=(\beta^2 M/d)(C/C_*)^2(du/dz)^2 A_{ik}\,,\quad \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xz} \\ A_{zx} & A_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.1015-0.109\mu & 0.0898-0.084\mu \\ 0.0762+0.102\mu & -0.0898+0.067\mu \end{pmatrix} \text{-------①}$$

ここに、d：粒径，C：粒子の容積濃度，u：粒子の流れ方向（x方向）の巨視的速度，C_*：最密充てん濃度，β：流動層の単位体積中の粒子数N を C_*で表示するときの係数，Mは多体粒子系としての効果を考慮したときの単一粒子のみかけの質量で、以下において考察される。

注目する０粒子に i 粒子（１次粒子と呼ぶ）が衝突した瞬間、１次粒子に接触している２次粒子，２次粒子に接触している３次粒子、・・・・に次々と運動量が伝達されていくはずである。このとき、各粒子の運動方程式は、j 次粒子の速度を u_j、質量を m とおいて、次式となる。

$$\left.\begin{array}{ll} m\,du_1/dt=(\boldsymbol{n}-\mu\boldsymbol{S})F+\sum\limits_{1N_2}\mathbf{E}_{2,1}\,, & m\,du_2/dt=\mathbf{E}_{1,2}+\sum\limits_{2N_3}\mathbf{E}_{3,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ m\,du_l/dt=\mathbf{E}_{l-1,l}+\sum\limits_{lN_{l+1}}\mathbf{E}_{l+1,l}\,, & m\,du_{l+1}/dt=\mathbf{E}_{l,l+1}+\sum\limits_{l+1N_{l+2}}\mathbf{E}_{l+2,l+1} \end{array}\right\} \text{-----②}$$

ここに、$\mathbf{E}_{j,j+1}$は j 次粒子から接点を介して（$j+1$）次粒子へ作用する力、${}_jN_{j+1}$は注目する単一の j 次粒子に接触している（$j+1$）次粒子の数である。作用・反作用の法則より、$\mathbf{E}_{j,j+1}=-\mathbf{E}_{j+1,j}$である。そして、次の関係が仮定されよう。

$$F>\sum_{1N_2}|\mathbf{E}_{2,1}|\,,\ |\mathbf{E}_{1,2}|>\sum_{2N_3}|\mathbf{E}_{3,2}|\,,\ \cdots\cdots,\ |\mathbf{E}_{l,l+1}|>\sum_{l+1N_{l+2}}|\mathbf{E}_{l+2,l+1}|$$

②式の辺々をたし合わせ、上の不等式を考慮すれば、

$$\left.\begin{aligned} & m\left(du_1/dt+\sum_{1N_2} du_2/dt+\cdots\cdots+\sum_{1N_2}\sum_{2N_3}\cdots\cdots\sum_{\ell N_{\ell+1}} du_{\ell+1}/dt\right) \\ & =(n-\mu S)F+\sum_{1N_2}\sum_{2N_3}\cdots\cdots\sum_{\ell+1 N_{\ell+2}} E_{\ell+2,\,\ell+1} \fallingdotseq (n-\mu S)F \end{aligned}\right\} \text{---} ③$$

ここで、ℓ 次の単一粒子から、それに接触する（$\ell+1$）次粒子群へ、接点を介して伝達される運動量の割合を ε として、次の関係を仮定する。

$$\sum_{1N_2}\frac{du_2}{dt}\Big/\frac{du_1}{dt}=\sum_{2N_3}\frac{du_3}{dt}\Big/\frac{du_2}{dt}=\cdots\cdots=\sum_{\ell N_{\ell+1}}\frac{du_{\ell+1}}{dt}\Big/\frac{du_\ell}{dt}=\varepsilon \text{ ----} ④$$

但し、$0<\varepsilon<1$ である。この仮定のもとに③式は、

$$m(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots\cdots+\varepsilon^\ell)\,du_1/dt=(n-\mu S)F \text{ -------} ⑤$$

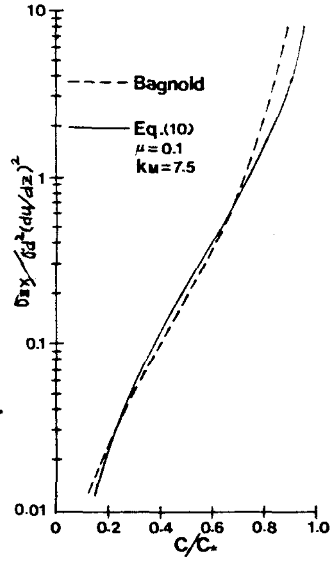
となる。ここで $\ell\to\infty$ とおくと、⑤式は

$$\{m/(1-\varepsilon)\}\,du_1/dt=(n-\mu S)F \text{ ---------} ⑥$$

が得られる。これを単一粒子の i 粒子が０粒子に衝突する場合の運動方程式と比較すると、単一粒子の質量 m が $m/(1-\varepsilon)$ で置き換わっていることが分る。従って、$M=m/(1-\varepsilon)$ --- ⑦ となる。さらに運動量伝達率 ε は、濃度 C が最密充てん濃度 C_* に近くなるほど１に近づくと考えられるので、$C=C_*$ の近傍でテーラー展開して、

$$\varepsilon=1+\partial\varepsilon/\partial c\,(C-C_*)+\cdots\cdots\fallingdotseq 1+(1/k_M)\{(C-C_*)/C_*\}$$

とおくと、結局 $M=mk_M/(1-C/C_*)$ となる。



図－2

(2) 接触応力　衝突後の粒子相互の接触に起因する応力である接触応力は接点を介して現われるので、衝突点を除いた接点の粒子まわりの頻度分布と接触力に規定される。前報によると[3]、粒子まわりの接触角の頻度分布はⅡ，Ⅳ象限に若干偏っているが、衝突点も同じ領域に集中するから、衝突点を除いた接点の分布は近似的に一様であるとみなされる。次に接触力は接点における法線成分 F' と接線成分 $\mu F'$ とから成り、F' が接触角にかかわりなく一定であると仮定すれば、前者は垂直応力に、後者はせん断応力に関連する。しかし高速で流下する土石流では、接触力の接線成分の寄与は衝突せん断応力にくらべて小さく無視することができよう。F' から接触垂直応力 P への変換は、次式で与えられる。[4]

$$P=(1/6)\,n_c\,d\,F'N=\beta(n_cF'/6d^2)(C/C_*) \text{ --------} ⑧$$

ここに n_c は単一粒子まわりの接点数である。⑧式における n_cF' の厳密な評価はきわめて困難であるが、ここでは簡単に以下のように考える。もし土石流における粒子の衝突が完全弾性衝突であると仮定するならば、衝突によって発生する垂直応力だけで粒子の水中重量の垂直成分を受けもつはずである。しかし実際は、衝突は非弾性的であり、その結果、衝突に付随的に接触力 F' が発生している。従って F' は衝突垂直応力では受けもちきれない余分な水中重量によって生じた力であると考える。従って $\beta n_cF'/(6d^2)$ をまとめて、$P=0$ である流動層表面濃度 C_s を基準にして、その近傍でテーラー展開して次式を得る。

$$P=K_p(C/C_*)\{(C-C_s)/C_s\} \text{ ---------} ⑨$$

ここに $K_p\cdot C/C_*$ は従来の連続体における体積弾性係数に相当するものと思われる。①，⑨式より粒子間応力は、

$$\sigma_{jk}=\tau_{jk}-P\delta_{jk}=(\beta^2m/d)\,k_M\{(C/C_*)^2/(1-C/C_*)\}(du/dz)^2A_{jk}-K_p(C/C_*)\{(C-C_s)/C_s\}\,\delta_{jk} \text{ ---} ⑩$$

なお、K_p の式形は上述の考察から $K_p \propto (\sigma-\rho)g h\cos\theta_0$ と予想されるが、詳細は後報[5]で取り扱う。⑩式における k_M を類推するため Bagnold の実験式と比較すると、$\mu=0.1$ の場合 $k_M=7.5$ 程度であれば両式の適合性は良いことが分る（図－２）。⑩式を土石流へ適用した結果については、後報[5]で述べることにする。

（参考文献）1) Bagnold：Proc. Roy. Soc. A, Vol.225, 1954,　2)高橋保：京大防災研年報，20号B-2, 1977,
3)橋本・椿・末次：土木学会第35回年講，1980,　4)長尾高明：機械学会論文集，Vol.45, No.392, 1979,
5)末次・椿・橋本・中西：昭和55年度土木学会西部支部研究発表会講演，1981