

九州大学工学部 正員 栗谷陽一
九州工業大学 正員 O 藤崎一裕

11. まえがき

沈降性物質の移流分散現象に関しては、水路底部への粒子の沈積を認めない場合の分散係数が求められている¹⁾。筆者らは、これに対して沈降粒子の再浮上がないときの類似の現象に対して検討を続けている。

さらに、水路内での粒子保存の式において、流下方向の濃度勾配がない場合の解を基本解とし、この解に線形補正項を加えるという手法で、分散係数等を検討した²⁾。今回は、この取扱いをさらに進めて、浮遊粒子の沈降による減少は濃度勾配の影響を受けるという立場から現象を調べた。

そして、流下方向に濃度勾配がある場合には、浮遊粒子のみかけの平均移流速度が増大することを示した。また、その結果を用いて分散係数等を求め、その利用例を示した。

2. 基礎式

流下方向に x 軸、水路底から水面へ y 軸ととり、水深: h 、粒子濃度: C 、沈降速度: w 、流速: u 、拡散係数: D とすると、開水路常流状態での粒子の保存式と境界条件式は次式となる

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (uC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ D \frac{\partial C}{\partial y} + wC \right\} \quad (1)$$

$$D \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + wC = 0, (y=h) \quad (21), \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0, (y=0) \quad (22)$$

ここで、 u および D は次式で表わす

$$u/u_* = A + (1/\kappa) \ln(u_* y/\nu) = (1/\kappa) \ln(y/y_0) \quad (3)$$

$$D = \kappa u_* y (1 - y/h) \quad (4)$$

濃度 C に関しては、 x 方向の変化が小さい場合を想定して、移動座標 x_1 で展開して1次の項までとり次式で表わす。

$$C(x_1, y, t) = \bar{C}(y, t) (1 - Kx_1) + \hat{C}(y, t) \quad (5)$$

K は一定とし、 $\bar{C}$ は下の (6) 式の解とすると

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \bar{y} (1 - \bar{y}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + Z \bar{C} \right\} \quad (6)$$

$$\bar{t} = t \cdot \kappa u_* / h, \quad \bar{y} = y/h, \quad Z = w / (\kappa u_*) \quad (7)$$

(6) 式の解を (2.2) 式を考慮して

$$\bar{C}(\bar{y}, \bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n \exp(-\lambda_n \bar{t}) \quad (8)$$

$$\bar{C}_n = (1 - \bar{y})^2 \sum_{i=0}^{\infty} E_i \bar{y}^i \quad (9)$$

とおくと、(6) 式から

$$\lambda_n = (Z + n)(Z + n + 1) \quad (10)$$

$$E_i = \frac{(-1)^i \Gamma(Z + n + 1) \Gamma(Z + 1) \cdot n!}{i! \Gamma(Z + n + 1) \Gamma(Z + 1) (n - i)!} E_0 \quad (11)$$

となり、 $\bar{C}_n$ として順次つぎのような式がえられる

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_0 &= (1 - \bar{y})^2, \quad \bar{C}_1 = (1 - \bar{y})^2 \{ 1 - 2\bar{y} \} \\ \bar{C}_2 &= (1 - \bar{y})^2 \left\{ 1 - \frac{2(Z+2)}{Z+1} \bar{y} + \frac{2(Z+3)(Z+4)}{2(Z+1)(Z+2)} \bar{y}^2 \right\}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、(5) 式を (12) 式の $\bar{C}_1$ 式を参考にして以下のように表わす

$$C(x_1, y, t) = \{ \bar{C}_0 (1 - Kx_1) + \hat{C}_0 \} e^{-\lambda \bar{t}} \quad (13)$$

$$\lambda = \lambda_0 + K\mu = Z(Z+1) + K\mu \quad (14)$$

(14) 式は、沈降の様相が濃度勾配 K に比例して若干変化することを考慮に入れている。(13) 式を (1) 式に代入し、(14) 式を用いて整理すると

$$\bar{y} (1 - \bar{y}) \hat{C}_0'' + (Z + 1 - 2\bar{y}) \hat{C}_0' = -(1 - Kx_1) K\mu - K\hat{C}_0 \hat{C}_0 \quad (15)$$

$$\hat{C}_0' = u / (\kappa u_*) - \bar{C}_0, \quad \bar{C}_0 = \int_0^{\bar{y}} \hat{C}_0 u / (\kappa u_*) d\bar{y} / \int_0^{\bar{y}} \bar{C}_0 d\bar{y} \quad (16)$$

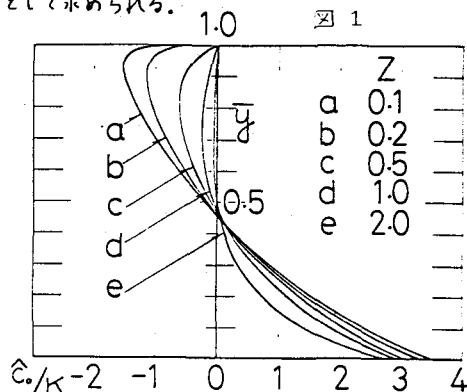
がえられる。上式を解いて $\hat{C}_0$ が (17) 式で与えられる

$$\hat{C}_0 = -K(1 - \bar{y})^2 \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{\bar{y}^{2Z+1} (1 - \bar{y})^{2Z}} \int_0^{\bar{y}} \bar{y}^Z (1 - \bar{y})^Z (\mu + \hat{C}_0) d\bar{y} d\bar{y} \quad (17)$$

上式中の μ は、 $\bar{y} = 1$ で $\hat{C}_0$ が有限であることから

$$\mu = - \int_0^1 \frac{\bar{y}^Z}{(1 - \bar{y})^{2Z}} \hat{C}_0 d\bar{y} / \int_0^1 \frac{\bar{y}^Z}{(1 - \bar{y})^{2Z}} \bar{C}_0 d\bar{y} \quad (18)$$

として求められる。



3. 計算結果と考察

図1に $\hat{c}$ 、図2に μ 、 $\bar{U}_s$ を示す($\bar{U}_s$ は u の平均値/ ku_s)。これらの図から、 Z の値に対するそれぞれの量の変化の様子を知ることができる。また、図2に次式で求めた分散係数を示す。

$$\frac{D_c}{kU_s} = -K \int_0^1 \hat{c}_y \hat{c}_z d\bar{y} \quad (19)$$

これらの量を用いると、開水路流れにおける粒子濃度の変化は、横断面内平均濃度 $\langle c \rangle$ を用いて

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + (\bar{U}_s + \mu) \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} = \frac{D_c}{kU_s} \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial x^2} - \lambda \langle c \rangle \quad (20)$$

と表わされる。上式によると、沈降による $\langle c \rangle$ の減少が、 λ で定められるとすると、このときの粒子の平均移流速度は、(16)式の $\bar{U}_s$ に比べて、 μ だけみかけ上速くなることになる。

図3に、差分計算で求めた濃度分布の1例を示す。(b)はそれぞれ代表的3点の水深方向の濃度分布である。図によると、フラウドの先端部で底面近傍の濃度が小さめに、また、後端部では逆に底面近傍の濃度が大きく出ている。(図中の破線は(13)式による値を示す)このため、粒子沈降による水路底部への沈積は、フラウドの後半部(上流側)の方が大きくなる。これが粒子のみかけ移流速度を増大させる原因と考えられる。

図4には、差分計算で求めた濃度分布の分散(variance)と、(19)式の分散係数とを比較した。

沈殿池の除去率評価に(20)式を利用する意味で、 $\partial/\partial t=0$ 、 $\langle c \rangle=1$ 、 $(x=0)$ として、同式の解を求めた。

$$\langle c \rangle = \exp(-R_z \cdot \omega/\omega_s), \quad \omega/\omega_s = x/\omega_s \cdot Z \quad (21)$$

としたときの R_z の値を表1に示す(4)。(4)の値は(1)式で求めた、最低次の固有値、固有関数による定常解³⁾である(20)式は、非定常問題:特に有効と考えられるが、表1によると、 Z が小さいときや、 ω/ω_s が大きいときには、この種の問題にも同式の利用が可能ながわかる。

表 1

$R_z \backslash Z$	0.1	0.2	0.5	0.7	1.0	1.5
1	1.10	1.19	1.47	1.66	1.94	2.41
4	1.12	1.21	1.49	1.67	1.95	2.42

参考文献

- 1) Sumer, BM : J Fluid Mech., Vol. 65, 1974, pp.11~28
- 2) 栗谷 隆雄: 工学会論文誌, 二, 1979, pp.199~200
- 3) 栗谷 隆雄: 工学会論文誌, 二, 1979, p.133

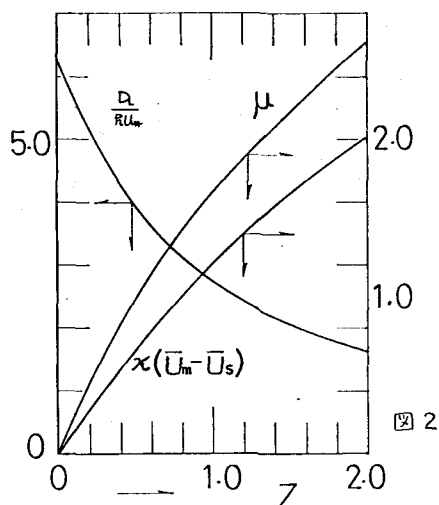


図 2

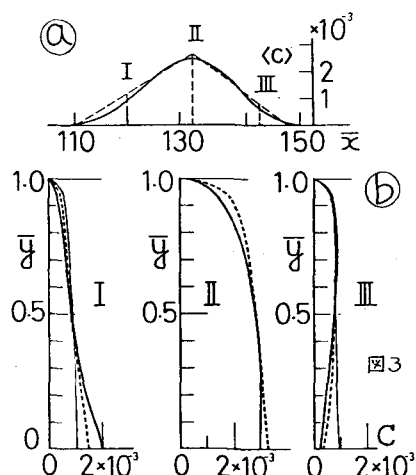


図 3

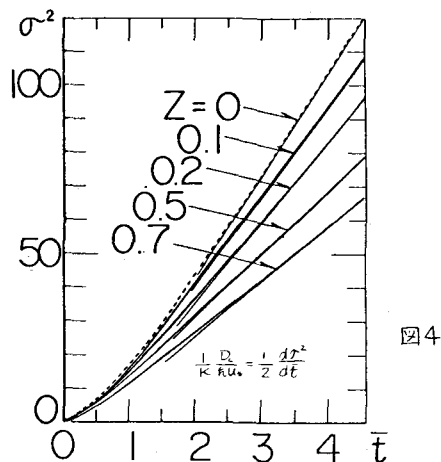


図 4