

長崎大学工学部 学生員 〇村中幸治
正員 高橋和雄

1. 緒言 吊橋、斜張橋や送電線などに質量の大きな長大ケーブルが採用されている。引張材としての機能を最大限に活用するケーブルは剛性が小さく、その動的挙動を把握する必要がある。このために、ここ数年の間に Irvine⁵⁾、Henghold⁶⁾、山口ら⁹⁾等数多くの研究が発表されている。これらの研究はいずれも微小振動の仮定のもとに線形自由振動を取り扱っている。しかし、ケーブルは本質的に幾何学的非線形性を有する構造部材であるために、ケーブルの動特性を議論するには動的非線形特性の把握が不可欠である。ケーブルの非線形振動に関する研究は未だ着手された段階にあり、未解決の問題が数多く残されている。そこで、本論文は Irvine らおよび山口らによつて誘導された連続体としての非線形運動方程式を著者らがよりおよび薄板の非線形振動の解析に用いた解法を適用して、ケーブルの非線形振動を解析するものである。すなわち、ケーブルの非線形運動方程式を Galerkin 法を用いて多自由度系の運動方程式に変換した後、調和バランス法を用いてえられた連立非線形代数方程式を数値解析するものである。具体的な解析結果は第2報および第3報で報告する。

2. 運動方程式および解の分類 図-1に示すような座標系を導入する。本研究におけるケーブルに関する記号はすべて山口らの論文に使うものとする。完全可撓性、伸張性を仮定したケーブルの3次元非線形運動方程式は次のように与えられる。^{1),3)}

$$L_1(u, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_1 \frac{1}{x_0} + C_2 x_0 \right\} \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 x_0 y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C_1 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x_0 \frac{\partial u}{\partial x} + y_0 \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \left(x_0 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} - \frac{P_1}{\rho} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(u, x) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_1 \frac{1}{x_0} + C_2 x_0 \right\} \frac{\partial v}{\partial x} + C_2 x_0 y_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - C_1 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x_0 \frac{\partial u}{\partial x} + y_0 \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \left(y_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} - \frac{P_2}{\rho} = 0 \quad (2)$$

$$L_3(u, x) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_1 \frac{1}{x_0} + C_2 x_0 \right\} \frac{\partial w}{\partial x} - C_1 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x_0 \frac{\partial u}{\partial x} + y_0 \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{P_3}{\rho} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\{x_0, y_0, 0\}$ はケーブルの初期形状を表わし、 x_0 と y_0 の間に次式が成立する ($y_0 = -\frac{1}{g l^2} \cosh(\theta l) (1 - \frac{x_0}{l}) + a$)
 $+ \tan \theta + \frac{1}{g l^2} \cosh \alpha, \alpha = \sinh^{-1} \left(\frac{g l^2 \tan \theta}{\cosh(\theta l)} \right) - g l^2$, ただし、 $g = \frac{\rho g l}{H_0}$, ケーブルの形状を放物線で近似した場合のサグ比
 H_0 : 初期水平張力, l : 支間長, ρ : ケーブルの単位長さ当りの質量, u, v : ケーブルの面内水平および鉛直変位, w : ケーブルの面外変位, t : 時間, s : ケーブルの初期形状に沿う曲線座標, $C_0 = \sqrt{H_0/\rho}$: 横波伝播速度,
 $C_1 = \sqrt{EA/\rho}$: ケーブルの縦波伝播速度, E : ヤング率, A : 断面積, P_1, P_2, P_3 : 荷重強度, x_0, y_0 は初期形状の s による常微分を示す。また、図-1において、 θ : 支間傾斜角, f : ケーブルサグ ($= y_0 - x_0 \tan \theta$)_{max} である。

式(1), (2)がケーブル面内振動を、式(3)が面外振動を表わす運動方程式であり、非線形項を介してすべての変位成分が連成している。サグのない弦の運動方程式には3次の非線形項のみが含まれるが、サグのあるケーブルでは他に2次の非線形項が含まれる点に大きな特徴がある。運動方程式の解の分類をすれば図-2

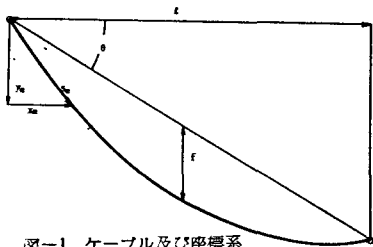


図-1 ケーブル及び座標系

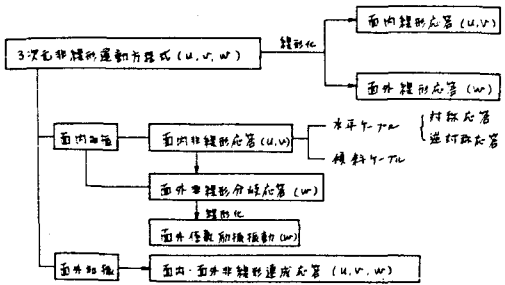


図-2 解の分類

の結果がえられる。図のように面内加振の場合には面外変位は直接加振されず、面内非線形応答のみが生ずる。しかし、面外の運動方程式の面外変位の係数に面内変位 u, v の項が含まれるために、面外運動方程式は係数励振形の微分方程式となり、特定の振動数領域で面外振動が存在する。この面外振動は面外非線形分岐応答もしくは面外係数励振不安定振動として取り扱うことができる。これに対して面外加振の場合には面内の運動方程式の非線形項に $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ および $(\frac{\partial v}{\partial x})^2$ の項が含まれるから、これらの項が付加外力として面内の運動方程式に作用する。したがって面外振動によって面内振動が引き起こされる面外・面内非線形連成応答が生ずることになる。

3. 解法 式(1)、(2)および(3)は連立非線形偏微分方程式であるために、直接解くことは不可能であるから、本研究ではGalerkin法を適用する。すなわち、式(1)、(2)および(3)の解を次のような変数分離形に仮定する。

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) U_n(\omega), \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) V_n(\omega), \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) W_n(\omega) \quad (4)$$

ここに、 $P_n(x), Q_n(x)$ ：未知の時間関数、 $U_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{nk} \sin \frac{\pi k x}{L}$, $V_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk} \sin \frac{\pi k x}{L}$ ：面内線形振動の第 n 次振動形、 $W_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk} \sin \frac{\pi k x}{L}$ ：面外線形振動の第 n 次振動形、 L ：初期ケーブル長

式(4)を式(1)、(2)、(3)に代入してGalerkin法を適用すれば、 P_n, Q_n に関する連立非線形常微分方程式がえられる。面内正弦外力による面内振動の場合について示せば次のとおりである。

$$m_n \ddot{P}_n + \sum_{k=1}^{\infty} k_{kn} \bar{P}_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{kjm} \bar{P}_k \bar{P}_j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{kjm} \bar{P}_k \bar{P}_j = P_n \cos \omega t \quad (5)$$

ここに、 $k = c/L$ ：ケーブルの縦波・横波伝播速度比、 $m_n, k_{kn}, k_{kjm}, P_n$ ：Galerkin法による積分項で、初期形状と n, l, π 次の振動形からなるものである。上式において、変位についてはサグ比 $\gamma = \delta/L$ と同様にケーブルの支間長で無次元化され($\bar{P}_n = P_n/L$)、時間については傾斜した弦の1次の固有周期 $T_1 = \frac{L}{\pi c \sqrt{1+\gamma^2}}$ で無次元化されている($\omega = \omega T_1$)。また $\omega = \Omega T_1$ は加振振動数 Ω を傾斜した弦の1次の固有振動数で無次元化したものである。なお、ケーブルの非線形振動を支配するパラメーターは線形振動の場合と同じで、形状パラメーターとしてのサグ比 γ 、傾斜角 α および材料パラメーターとしての伝播速度比 k の3個である。

連立非線形常微分方程式を解くために、調和バランス法を適用する。2次および3次の非線形項が含まれるために、 $\bar{P}_n, \bar{Q}_n$ の解を次のように仮定する。

$$\bar{P}_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m \omega t, \quad \bar{Q}_n = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m \omega t \quad (6) \quad \text{ここに、} a_m, b_m \text{：未定変数}$$

式(6)を微分方程式に代入して、係数比較を行えば、 a_m, b_m を求めるための連立非線形代数方程式がえられる。たとえば式(5)の場合には次のように表わされる。

$$-m_n m \omega^2 a_m + \sum_{k=1}^{\infty} k_{kn} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{kjm} a_k a_j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{kjm} a_k a_j = P_n \delta_{nm} \quad (7)$$

ここに、 f_{kij}^n, f_{kij}^m ： a_k, a_j, a_i からなる関数、 δ_{nm} ：Kroneckerのデルタ関数

式(7)にNewton-Raphson法の繰り返し計算法を用いて数値解析すれば、必要個解をえることができるが、現代の大型計算機を用いても連立非線形代数方程式を解くことは容易なことではなく、20程度が限度である。ケーブルの非線形応答を評価するためには、2次および3次の非線形項から生ずる静的応答 a_0 、2倍の高調波成分 a_2 および3倍の高調波成分 a_3 が最低必要であるから、 $m=0, 1, 2, 3$ の4項が時間項として採用である。したがって一般座標 $\bar{P}, \bar{Q}$ としては5自由度程度まで採用可能である。ケーブルの振動形はサグ比によって著しく異なっており、有効外力の項が最低次の振動形の場合に最大となるとは限らないために、荷重状態によって自由度の選択に注意が必要である。式(6)によってえられたケーブルの時間的、空間的変動はケーブルの位置および時刻によって異なっているが、本論文ではケーブルの変位が最下点に達した時刻($\tau=0$)のケーブル中央点の変位(対称振動の場合)および3/10点の変位(非対称振動の場合)を振幅比 A として採用した。

参考文献 1) Irvine, H.M. and Caughey, T.K.: Proc. R. Soc. (London), A341, pp.299-315, 1974. 2) Houghold, W.M., Russell, J.J. and Morgan, J.D., II: Proc. of ASCE, Vol. 103, NO. ST5, pp.1127-1136, 1977. 3) 山口、伊藤：土木学会論文報告集、第286号、pp.29-36, 1979. 4) 山口、宮田、伊藤：土木学会第35回年次学術講演会論文集第I部I-175, 1980. 5) 高橋、河原、山辺：土木学会論文報告集、第293号、pp.9-22, 1980.