201—(3)　回転を考慮したトラスの有限変形解析

熊本大学工学部　正員　三池亮次
同上　正員　○小林一郎

1．はじめに．筆者ら[1]はさきに，Lagrange−Euler併用形で割線増分形エネルギー基礎式を誘導した。すなわち，物体の変形を，変形前，変形の中間状態，及び変形の中間状態において，表面力$\mathbb{P}$と物体力$\mathbb{f}$が作用し有限の変位増分$\Delta\mathbb{u}$が生じた増分後の状態に分けるとき，その有限の変位増分$\Delta\mathbb{u}$に対して次の仮想仕事の原理

$$\iint \mathbb{P}\cdot\Delta\mathbb{u}\,dA+\iiint \mathbb{f}\cdot\Delta\mathbb{u}\,dV=\iint \mathbb{P}^{*}\cdot\Delta\mathbb{u}\,dA'+\iiint \mathbb{f}^{*}\cdot\Delta\mathbb{u}\,dV'=\iiint trace\,(\mathbb{T}_K\cdot\Delta\mathbb{E}_K)\,dV' \tag{1}$$

が成立する。ここにdA，dVは，中間状態における，dA' dV'は，増分後における表面積及び体積の要素である。また$\Delta\mathbb{E}_g$をGreenひずみテンソル増分とすると$\Delta\mathbb{E}_K=\Delta\mathbb{E}_g+\Delta\mathbb{E}_\theta$であり，ひずみが微小であるが回転$\Delta\theta$が有限であるような2次元変形する物体に対して$\mathbb{T}_K$[2]は埋め込み座標系に対しての通常の応力テンソル$\mathbb{T}^{**}$に等しく，また$\Delta\mathbb{E}_g$は埋め込み座標系に対する通常のひずみテンソル$\mathbb{E}^{**}$に等しい。また

$$\Delta\mathbb{E}_\theta=\begin{bmatrix}1-\cos\Delta\theta & 0\\ 0 & 1-\cos\Delta\theta\end{bmatrix} \tag{2}$$

となるから

$$\begin{aligned}trace\,(\mathbb{T}_K\cdot\Delta\mathbb{E}_K)&=trace\,(\mathbb{T}^{**}\cdot\Delta\mathbb{E}^{**})+trace\,(\mathbb{T}^{**}\cdot\Delta\mathbb{E}_\theta)\\&=\tau_{11}^{**}\Delta e_{11}^{**}+\tau_{22}^{**}\Delta e_{22}^{**}+\tau_{12}^{**}\Delta e_{12}^{**}+\tau_{11}^{**}(1-\cos\Delta\theta)+\tau_{22}^{**}(1-\cos\Delta\theta)\end{aligned} \tag{3}$$

ここに，τ_{ij}^{**}，e_{ij}^{**}は$\mathbb{T}^{**}$および$\mathbb{E}^{**}$の要素である。軸力N，せん断力Q，曲げモーメントMを受ける2次元骨組構造では，部材断面の中立軸からの距離xにおいて

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{11}^{**}=\frac{N}{A}+\frac{M}{I}x\,,\quad \tau_{12}^{**}=\frac{Q}{A}\,,\quad \tau_{22}^{**}=0\\&\Delta e_{11}^{**}=\frac{\Delta N}{EA}+\frac{\Delta M}{EI}x\,,\quad \Delta e_{12}^{**}=\frac{\Delta Q}{GA}\,,\quad \Delta e_{22}^{**}=0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

であるから，骨組部材軸に沿う長さをds，部材断面の距離xにおける面素の面積をdaとする。$dV'=da\,ds$より

$$\left.\begin{aligned}&\iint\tau_{11}^{**}\Delta e_{11}^{**}\,da\,ds=\int\frac{N}{EA}\Delta N\,ds+\int\frac{M}{EI}\Delta M\,ds\,,\quad \iint\tau_{12}^{**}\Delta e_{12}^{**}\,da\,ds=\int\frac{Q}{GA}\Delta Q\,ds\\&\iint\tau_{11}^{**}(1-\cos\Delta\theta)\,da\,ds=\int(1-\cos\Delta\theta)\,N\,ds\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

これより，$\mathbb{T}_K$が$\Delta\mathbb{E}_K$に対してなす仮想仕事の総和は

$$\int trace\,(\mathbb{T}_K\cdot\Delta\mathbb{E}_K)\,dV'=\int\left[\left\{\frac{\Delta N}{EA}+(1-\cos\Delta\theta)\right\}N+\frac{\Delta M}{EI}M+\frac{\Delta Q}{GA}Q\right]ds \tag{6}$$

である。上式において

$$\begin{bmatrix}\Delta e_N\\ \Delta\theta_M\\ \Delta\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{EA} & & 0\\ & \frac{1}{EI} & \\ 0 & & \frac{1}{GA}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta N\\ \Delta M\\ \Delta Q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-\cos\Delta\theta\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{7}$$

とし，かつこれを次式のようなマトリックス表示する。

$$\Delta\mathbb{e}_m=\mathbb{F}_S\,\Delta\mathbb{P}_m+\Delta\mathbb{e}_\theta=\Delta\mathbb{e}_m'+\Delta\mathbb{e}_\theta \tag{8}$$

2. 接線マトリックスによる定式化. 上述の理論を接線マトリックスによる平衡法によって骨組構造に適用する。部材断面力を $\mathbb{P}_m$, 変形(相対変位)を e_m, 有限の変位増分を Δd とすると式(1)は

$$\mathbb{P}^t \Delta d = \mathbb{P}_m^t \cdot e_m' \qquad (9)$$

となる。ここで、接線マトリックスを $\mathbb{C}$, 剛性マトリックスを $\mathbb{K}_m$, 式(8)より $e_m = e_m' + e_\theta$ とすると、

平衡条件; $\mathbb{P} = \mathbb{C}\,\mathbb{P}_m$ (10), 弾性条件: $\mathbb{P}_m = \mathbb{K}_m e_m$ (11), 適合条件: $e_m = \mathbb{C}^t \Delta d$ (12)

であるので、変位増分 Δd は式(9)〜(12)より、次式のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta d &= (\mathbb{C}\mathbb{K}_m\mathbb{C}^t)^{-1}\mathbb{P} + (\mathbb{C}\mathbb{K}_m\mathbb{C}^t)^{-1}\mathbb{C}\mathbb{K}_m e_\theta \\ &= \mathbb{G}^{-1}\mathbb{P} + \mathbb{G}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{K}_m e_\theta \qquad (\because\ \mathbb{G}^{-1} = (\mathbb{C}\mathbb{K}_m\mathbb{C}^t)^{-1})\end{aligned} \qquad (13)$$

なお、上式の右辺第2項が廻転によるみかけのひずみ増分である。次に、これらを、荷重増分法を適用できるよう増分形で定式化すると、次の通りである。ただし $\Delta\mathbb{P}$ を増分荷重, $\Delta\mathbb{P}_m$ を $\Delta\mathbb{P}$ による部材断面力の増分とする。式(9)の仮想仕事の原理は次式の通りである。

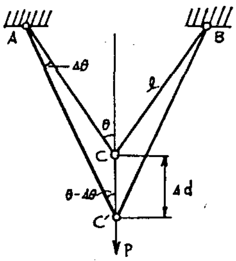
$$(\mathbb{P} + \Delta\mathbb{P})^t \Delta d = (\mathbb{P}_m + \Delta\mathbb{P}_m)^t \Delta e_m \qquad (14)$$

$\Delta\mathbb{P}$ による、接線マトリックスの変化量を $\Delta\mathbb{C}$ とすると、平衡条件と変位増分 Δd は次のようになる。

$$(\mathbb{P} + \Delta\mathbb{P}) = (\mathbb{C} + \Delta\mathbb{C})(\mathbb{P}_m + \Delta\mathbb{P}_m) \qquad (15)$$

$$\Delta d = (\mathbb{C} + \Delta\mathbb{C})\mathbb{K}_m(\mathbb{C} + \Delta\mathbb{C})^t\left\{\Delta\mathbb{P} - \Delta\mathbb{C}\mathbb{P}_m + (\mathbb{C} + \Delta\mathbb{C})\mathbb{K}_m \Delta e_\theta\right\} \qquad (16)$$

3. 2本吊トラスによる例題. 図−1より幾何学的に求めた変位と式(13)が等しいことを確かめる。図より平衡条件: $P = 2N\cos(\theta - \Delta\theta)$, 適合条件: $\Delta l = \Delta d\cos(\theta - \Delta\theta)$ となるので、微小変形の変位 $\Delta d'$ は図−2において $\Delta x \fallingdotseq \Delta l$ として次式となる。ただし、バネ剛性 k は定数とし、弾性条件として $\Delta l = P/(2k \cdot \cos(\theta - \Delta\theta))$ を用いる。

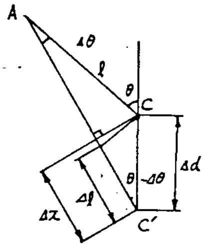


図−1

$$\Delta d' = \frac{P}{2k} \cdot \frac{1}{\cos^2(\theta - \Delta\theta)} \qquad (17)$$

有限変位の場合は $\Delta x \neq \Delta l$ より $\Delta l = \Delta d\cos(\theta - \Delta\theta) - (1 - \cos\Delta\theta)\,l$ を用いて

$$\Delta d = \frac{\Delta l}{\cos(\theta - \Delta\theta)} + \frac{(1 - \cos\Delta\theta)l}{\cos(\theta - \Delta\theta)} = \frac{P}{2k} \cdot \frac{1}{\cos(\theta - \Delta\theta)} + \frac{(1 - \cos\Delta\theta)l}{\cos(\theta - \Delta\theta)} \qquad (18)$$



図−2

となる。ここで式(13)より同じ Δd を求める。$\mathbb{P} = P$, $\mathbb{C} = [-\cos(\theta - \Delta\theta), -\cos(\theta - \Delta\theta)]$ より

$$\mathbb{G}^{-1} = \frac{1}{G} = \left(\mathbb{C} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \cdot \mathbb{C}^t\right)^{-1} = \frac{1}{2k\cos^2(\theta - \Delta\theta)} \qquad (19)$$

$$\mathbb{C}\mathbb{K}_m e_\theta = \mathbb{C}\mathbb{K}_m \cdot \begin{bmatrix} (1 - \cos\Delta\theta)l \\ (1 - \cos\Delta\theta)l \end{bmatrix} = 2k\cos(\theta - \Delta\theta) \cdot (1 - \cos\Delta\theta)l \qquad (20)$$

となり、式(19)(20)を式(13)に代入すれば、幾何学的に求めた式(18)と全く同一の式が得られ、みかけのひずみ増分 $(1 - \cos\Delta\theta)$ を考慮する必要のあることが確かめられることになる。尚、数値計算例は当日に報告する予定である。

参考文献 (1) 三池亮次 "有限変形における増分形仮想仕事の原理" 第34回年次学術講演会 昭和54年10月

(2) 三池亮次 "有限変形における補足仮想仕事の原理とその応用" 第29回応用力学連合講演会 昭和54年11月