

佐賀大学理工学部 正員 荒波重治

1. はじめに

構造物の地震時応答予測を行う際に不規則振動論が用いられるようになってから相当の時間が経過し、数多くの研究が行われてきた。現行用いられている手法はスペクトル理論であり、その計算は必ずしも容易であるとはいえず、実際の構造物に適用するまで至っていない。一方物理学では Brown 運動を記述するものとして、Langevin 方程式が与えられる。Langevin 方程式は白色雑音を振動力として持つものをめぐるが、その白色雑音を含む積分を伊藤の定義に従って記述する方式は伊藤型確率微分方程式と呼ばれている。訓練ではこの伊藤型確率微分方程式を用いた不規則ノイズを含む系の制御の方式が確立している。実際の地震動は勿論ホワイトノイズではなく、あるスペクトル密度を有するノイズである。しかし系に基礎層を考慮すれば相当な広さのスペクトル分布を持つことは知られている。そのために基礎を含む多質点系に要するものは、実際の地震時応答を模擬できる可能性を有していると考えられてきたであろう。このような考え方に基づき簡単な振動系について、振動応答の分散・共分散が強く容易に求められることを示す。

2. ホワイトノイズを受ける多質点系応答の分散・共分散

確率微分方程式の一般形は、 $d\xi = b(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dw$ ----- (1) と示される。ただし、 $\xi(t)$ は確率過程であり、 n 次元ベクトルを考慮しても良い。また dw はホワイトノイズを示す項で d 次元ベクトルであっても可なり。 $b(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ は任意の関数形式である。この確率微分方程式 ----- (1) は $\xi(t) = \xi(s) + \int_s^t b(r, \xi(r))dr + \int_s^t \sigma(r, \xi(r))dw(r)$, $S \leq t \leq T$ ----- (2) の形式的表現があり、この式の解の存在と一意性は証明されている。基礎的なホワイトノイズ外乱を受ける多質点系の運動方程式は (1) 式の特別な場合であり線形確率微分方程式と呼ばれ次式で与えられる。

$$d\xi = A(t)\xi(t)dt + \sigma(t)dw, \quad S \leq t \leq T \text{ ----- (3)}$$

構造物の応答を考慮する場合、我々にとって興味ある量は応答値の平均と、分散・共分散である。

$\mu_\xi(t) = E[\xi(t)]$, $\Sigma_\xi(t) = E[\xi_j(t) - \mu_\xi(t)][\xi_i(t) - \mu_\xi(t)]$ ----- (4) を平均と共分散と示すと、伊藤の積分公式を用いて求めることができる。(註略) 今平均値のベクトルを $\mu(t)$ 、分散・共分散マトリックスを $R(t)$ と示すと、それぞれは量に式に支配されることになっている。

$$d\mu = A\mu dt, \quad dR = (AR + RA^T + Q)dt \text{ ----- (5)} \quad \text{ただし } Q = \sigma\sigma^T \text{ と示すマトリックス。}$$

我々は (5) 式によって一般的に多自由度系の応答の分散・共分散を求めることができる。また (3) 式で示すようにホワイトノイズを表す係数 $\sigma(t)$ は時間の関数でめつても良いので一般的な非定常の外乱を取り扱うことは容易である。

3. 1 質点系の確率微分方程式と共分散の誘導

1 質点系の運動方程式は $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\sigma(t)\tau w(t)$ ----- (6) ただし $\sigma(t)$ は非定常項、 τ はホワイトノイズの強さを示す係数、 $w(t)$ は一般ブラウーニアン・モーションとする。一般的確率微分方程式の形式に表現するために、 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ とすると次のように (4) 式と同じになる。

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \sigma(t)\tau w(t) \text{ ----- (7)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma(t) \text{ --- (8)}$$

(8) 式の A , σ と (5) 式に代入すると平均、分散・共分散を求める常微分方程式を求めることができる。地震動のように原震まわりに加振する場合は、変位・速度の平均値は 0 なので、共分散マトリックスについてのみ求める。共分散の性質より $R_{12} = R_{21}$ とするので、分散・共分散を求める常微分方程式は次式で表わされる。

$$\frac{dR_{12}}{dt} = 2R_{12}, \quad \frac{dR_{22}}{dt} = R_{22} - \frac{k}{m} R_{11} - \frac{Q}{m} R_{12}$$

$$\frac{dR_{21}}{dt} = -\frac{2k}{m} R_{21} - \frac{2Q}{m} R_{22} - \gamma^2 \sigma^2(t) \quad \text{-----(9)}$$

非定常確率過程の場合には特別な場合を除き、解を陽に表現することは容易ではない。しかし定常確率過程の場合の解は容易に求めることができる。

$$R_{11} = E[x^2(t)] = \frac{\gamma^2}{4h\omega_0} \left\{ 1 - \frac{e^{-2h\omega_0 t}}{2\omega_0^2} \left\{ \omega_0^2 + \frac{(2h\omega_0)^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + h\omega_0 \omega \sin 2\omega_0 t \right\} \right\} \quad \text{-----(10)}$$

ここにホワイトノイズの強さを示す係数 γ を有するホワイトノイズの自己相関関数は $K = \gamma \delta$ (δ :デルタ関数)のとき $\gamma^2 = 2\pi S_{\omega}$ -----(11) (S_{ω} :ホワイトノイズのスペクトル密度)の関数を有する。(11)の関係をを用いると、スペクトル法により Caughey が求めた結果と一致する。また一般的に非定常外力を受ける場合、めわつた質点系の応答の分散・共分散を陽に解く必要はなく、数値計算で十分に求めることができる。

4. 数値計算例

4.1 1質点系の応答

1質点系の場合の解は(10)式で与えられている。当然のことながら Caughey の解と同一のものとなる。また(9)式を $\Delta t = \pi/1000$ とせしめて Runge-Kutta-Gill 法を用いて数値計算すれば完全に一致する。また変位と速度の共分散は大きく振動しながら0に漸近する。速度の分散は変位の分散と全く同じ傾向を示す。図-2は非定常の係数が $\gamma(t) = Q(e^{kt} - e^{-kt})$ と変位の場合の変位の分散を示す曲線である。この曲線は定常の場合のようになりながら振動の項がきえて、非常に滑らかな曲線となるのが特徴である。この傾向は図-3に示すように外乱が次第に増大するような非定常項 $\gamma(t) = 1 - e^{-kt}$ の場合も同様である。

4.2 2質点系の応答

2質点の場合共分散の対称性を利用して10個の未知数を有する連立常微分方程式となり、解を陽に求めることは困難である。2質点系の各点の変位の分散を図に示した。上階の方が1.7倍程度の分散を示している。同一点の速度と変位の共分散は0に漸近するのとは異なった点のその共分散はある値に漸近する。

- 1) 数理工学「確率微分方程式」1978 Nov.
- 2) 佐藤一「ランジュバン方程式」岩波書店

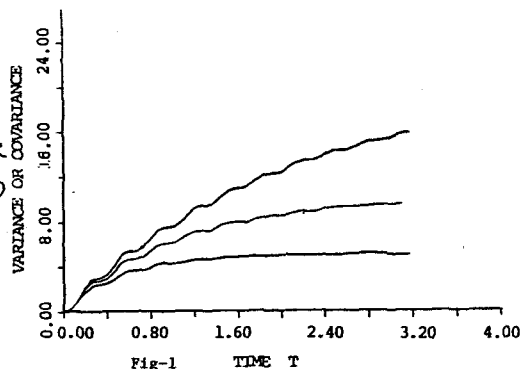


Fig-1 TIME T

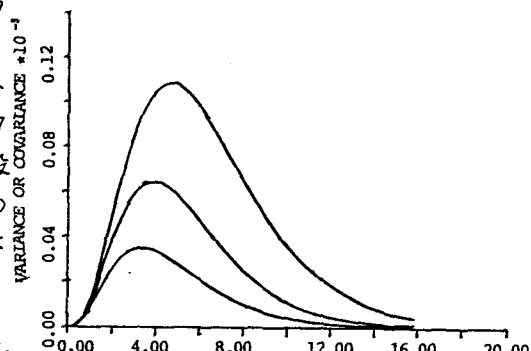


Fig-2 TIME T

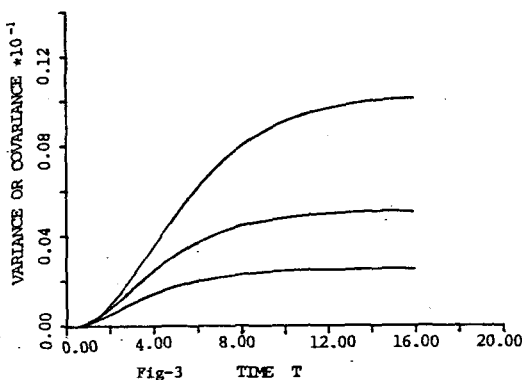


Fig-3 TIME T

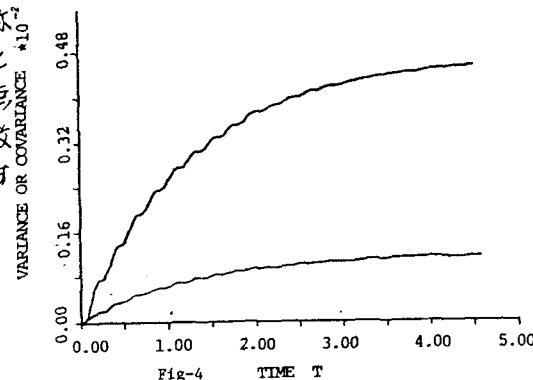


Fig-4 TIME T