202—(21)　不確定変量を有する構造物系の応答量の変動

長崎大学工学部　正　員○岡林　隆敏
長崎大学工学部　学生員　武林　和彦

1．はじめに　地震，風荷重等の不規則な外力を受ける構造物の応答解析においては、構造物は解析可能な力学モデルに単純化されると同時に，外力も確率過程によりモデル化される。このような不規則外力を受ける構造物の解析は，不規則振動論としてすでに定着しているものと思われる。一方，実在の構造物から解析モデルを構成する際，解析モデルには多くの不確定要因が含まれるが，この不確定要因が応答解析の結果に及ぼす影響は少なくない。構造物の解析モデルに内在する不確定要因としては、質量，剛性，靭性，強度および減衰などのばらつきがある。このような確率変量を有する系の応答解析には，まだ一般的な解法があるとはいえない。本論文では、線形近似理論を適用した解法を提案する。不規則外力を受ける構造物系の応答において、系のパラメータが確率変数となると、二乗平均値はこのパラメータに対する確率変数となる。ここでは、二乗平均応答の系のパラメータに対する平均値について検討した。

2．力学モデルの表現　非定常不規則外力を受ける構造物系の運動方程式は、状態空間でベクトル表示すると、(1)式で記述される。非定常外力を(2)式のように、確定関数と確率過程の積で表わされるものと考え、確率過程は、(3)式のフィルター方程式の出力として与えられるものとする。このとき、構造物－フイルター系は、(4)式の確率微分方程式で表現できる。一般性を失うことなく、(4)式の解過程の平均値応答は0であるものとする。このとき、外力 $\mathbb{W}(t)$ に対する解過程 $\mathbb{X}(t)$ の共分散行列 $\mathbb{R}_x(t)$ を　$\mathbb{R}_x(t)=E[\mathbb{X}(t)\mathbb{X}(t)^T]$　で定義すると、この時間的変化は、(5)式の共分散方程式に支配される。ここに、$E[\;]$ は確率過程に対する演算子である。

次に、確率微分方程式の係数が確率変数である場合、その確率変数の集合を Λ で表し、$\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$ で定義する。$\lambda_1\cdots\lambda_m$ の実現値の集合を，$\mathbb{\Lambda}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$ により定義する。さらに、$\mathbb{\Lambda}$ の確率密度関数を $P(\mathbb{\Lambda})$ で定義する。$\mathbb{\Lambda}$ に関する平均の演算子を〈〉の記号で表す。

構造物系

$$\dot{\mathbb{Y}}(t)=\mathbb{C}(t)\mathbb{Y}(t)+\mathbb{F}(t)\;,\;\mathbb{Y}(t_0)=\mathbb{Y}_0 \quad \text{--------}(1)$$

$\mathbb{Y}(t)$, $\mathbb{F}(t)$：n_1次元ベクトル

非定常不規則外力

$$\mathbb{F}(t)=\mathbb{D}(t)\cdot\mathbb{Z}(t) \quad \text{--------}(2)$$

$\mathbb{D}(t)$：確定時間関数，$(n_2\times n_2)$行列

$\mathbb{Z}(t)$：確率過程，n_2次元ベクトル

フイルター系

$$\dot{\mathbb{Z}}(t)=\mathbb{E}(t)\mathbb{Z}(t)+\mathbb{W}_Z(t) \quad \text{-------}(3)$$

$\mathbb{W}_Z(t)$：n_2次元白色雑音過程ベクトル

構造物－フイルター系

$$\dot{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{A}(t)\mathbb{X}(t)+\mathbb{B}(t)\mathbb{W}(t),\;\mathbb{X}(t_0)=\mathbb{X}_0 \quad \text{------}(4)$$

$\mathbb{X}(t)$：(n_1+n_2)すなわちn次元ベクトル

$\mathbb{W}(t)$：n次元白色雑音過程ベクトル

共分散方程式

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbb{R}}_x(t)&=\mathbb{A}(t)\mathbb{R}_x(t)+\mathbb{R}_x(t)\mathbb{A}(t)^T+\mathbb{B}(t)\mathbb{Q}\,\mathbb{B}(t)^T\\ \mathbb{R}_x(t_0)&=\mathbb{R}_0\end{aligned}\right\}\text{---}(5)$$

本研究で求める量は、応答の分散、共分散の確率変数 Λ に関する平均値であるから、これは次式で与えられる。

$$\langle\mathbb{R}_x(t)\rangle=\int\mathbb{R}_x(t,\mathbb{\Lambda})P(\mathbb{\Lambda})d\mathbb{\Lambda} \quad \text{------}(6)$$

このような確率変数 Λ を含む確率微分方程式と対応する共分散方程式を次式で記述する。

$$\dot{\mathbb{X}}(t,\mathbb{\Lambda})=\mathbb{A}(t,\mathbb{\Lambda})\mathbb{X}(t,\mathbb{\Lambda})+\mathbb{B}(t,\mathbb{\Lambda})\mathbb{W}(t) \quad \text{--------}(7)$$

$$\dot{\mathbb{R}}(t,\mathbb{\Lambda})=\mathbb{A}(t,\mathbb{\Lambda})\mathbb{R}_x(t,\mathbb{\Lambda})+\mathbb{R}_x(t,\mathbb{\Lambda})\mathbb{A}(t,\mathbb{\Lambda})^T+\mathbb{B}(t,\mathbb{\Lambda})\mathbb{Q}\,\mathbb{B}(t,\mathbb{\Lambda})^T \quad \text{-------}(8)$$

ここで、共分散 $\mathbb{R}_x(t,\mathbb{\Lambda})$ は確率変数となり、共分散方程式は確率微分方程式となる。

3．線形近似理論による定式化　不確定変量を表す確率変数 $\mathbb{\Lambda}$ は、平均値 $\bar{\mathbb{\Lambda}}$ と平均値回りの変動 $\hat{\mathbb{\Lambda}}$ を用いて、　$\mathbb{\Lambda}=\bar{\mathbb{\Lambda}}+\hat{\mathbb{\Lambda}}$　のように表される。共分散応答 $\mathbb{R}_x(t,\mathbb{\Lambda})$ を $\bar{\mathbb{\Lambda}}$ のまわりでTaylor展開すると、次のように表される。

$$\mathbb{R}_x(t,\Lambda)=\mathbb{R}_0(t,\overline{\Lambda})+\sum\hat{\lambda}_i\mathbb{R}_i(t,\overline{\Lambda})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\mathbb{R}_{ij}(t,\overline{\Lambda}) \qquad \text{---} \quad (9)$$

ここに、$\mathbb{R}_i(t,\Lambda)$、および、$\mathbb{R}_{ij}(t,\Lambda)$は、$\Lambda_i$および$\Lambda_i$, Λ_jに関する偏微分を表している。(9)式の両辺にΛに関する平均操作を施すと、$\mathbb{R}_x(t,\Lambda)$のΛに関する平均値

$$\langle\mathbb{R}_x(t,\Lambda)\rangle=\mathbb{R}_0(t,\overline{\Lambda})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\rangle\mathbb{R}_{ij}(t,\overline{\Lambda}) \qquad \text{-----} \quad (10)$$

を得る。(8)式において、$\mathbb{A}(t,\Lambda)$と$\mathbb{B}(t,\Lambda)$をΛの平均値回りで展開する。

$$\mathbb{A}(t,\Lambda)=\mathbb{A}_0(t,\overline{\Lambda})+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i\mathbb{A}_i(t,\Lambda)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\mathbb{A}_{ij}(t,\hat{\Lambda}) \qquad \text{-----} \quad (11)$$

$$\mathbb{B}(t,\Lambda)=\mathbb{B}_0(t,\overline{\Lambda})+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i\mathbb{B}_i(t,\Lambda)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\mathbb{B}_{ij}(t,\hat{\Lambda}) \qquad \text{-----} \quad (12)$$

(9)(10)(11)式を(8)式に代入し，両辺が恒等的に0となるものとすると、次の一群の連立微分方程式を得る。

$$\dot{\mathbb{R}}_0(t)=\mathbb{A}_0(t)\mathbb{R}_0(t)+\mathbb{R}_0(t)\mathbb{A}_0(t)^T+\mathbb{B}_0(t)\mathbb{Q}\mathbb{B}_0(t)^T \qquad \text{----} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbb{R}}_i(t)=\mathbb{A}_0(t)\mathbb{R}_i(t)+\mathbb{R}_i(t)\mathbb{A}_0(t)^T+\mathbb{A}_i(t)\mathbb{R}_0(t)+\mathbb{R}_0(t)\mathbb{A}_i(t)^T+\mathbb{B}_i(t)\mathbb{Q}\mathbb{B}_i(t)^T \qquad \text{-----} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbb{R}}_{ij}(t)=\mathbb{A}_0(t)\mathbb{R}_{ij}(t)+\mathbb{R}_{ij}(t)\mathbb{A}_0(t)^T+2\mathbb{A}_i(t)\mathbb{R}_j(t)+2\mathbb{R}_i(t)\mathbb{A}_j(t)^T+\mathbb{A}_{ij}(t)\mathbb{R}_0(t)+\mathbb{R}_0(t)\mathbb{A}_{ij}(t)^T+\mathbb{B}_i(t)\mathbb{Q}\mathbb{B}_j(t)^T \qquad \text{-----} \quad (15)$$

これはマトリックス形式の微分方程式であるから、通常のベクトル形式の微分方程式に変換する。不確定変量を2変量として、Λ_1とΛ_2とすると、微分方程式は、次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbb{H}_0(t)\\ \mathbb{H}_1(t)\\ \mathbb{H}_2(t)\\ \mathbb{H}_{11}(t)\\ \mathbb{H}_{12}(t)\\ \mathbb{H}_{22}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{G}_0(t) & & & & & [0]\\ \mathbb{G}_1(t) & \mathbb{G}_0(t) & & & & \\ \mathbb{G}_2(t) & 0 & \mathbb{G}_0(t) & & & \\ \mathbb{G}_{11}(t) & 2\mathbb{G}_1(t) & 0 & \mathbb{G}_0(t) & & \\ \mathbb{G}_{12}(t) & \mathbb{G}_2(t) & \mathbb{G}_1(t) & 0 & \mathbb{G}_0(t) & \\ \mathbb{G}_{22}(t) & 0 & 2\mathbb{G}_2(t) & 0 & 0 & \mathbb{G}_0(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{H}_0(t)\\ \mathbb{H}_1(t)\\ \mathbb{H}_2(t)\\ \mathbb{H}_{11}(t)\\ \mathbb{H}_{12}(t)\\ \mathbb{H}_{22}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{F}_0(t)\\ \mathbb{F}_1(t)\\ \mathbb{F}_2(t)\\ \mathbb{F}_{11}(t)\\ \mathbb{F}_{12}(t)\\ \mathbb{F}_{22}(t)\end{bmatrix} \qquad \text{-----------} \quad (16)$$

4. 数値計算と考察

数値計算は、白色雑音と狭帯域過程を入力とする1自由度系の変位のr.m.s.応答を対象とした。1自由度系の諸元は、次の通りである。質量の平均値 μ_m 1（$kg\cdot sec^2/cm$），ばね定数の平均値 μ_k $4\pi^2$（kg/cm），減衰係数 C 0.4π，0.04π（sec/cm），減衰定数の平均値 $\overline{h}$ 0.2，0.02，固有円振動数の平均値 $\overline{\omega}_0$ 2π（rad/sec）。図－1は、白色雑音を入力とする1自由度系のr.m.s.変位応答が、質量とばね定数の変動により変化する様子を示したものである。図中には、本解法とシミュレーションを並記したが、変動係数0.3程度まで良い一致を示している。図－2.3は、パワースペクトル密度

$$S_z(\omega)=S_0/\{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2\omega_0^2\} \qquad \text{------} \quad (17)$$

を有する狭帯域過程による応答を示したものである。1自由度系の減衰定数および(17)式のρを0.02とした。1自由度系の固有振動数ω_1と狭帯域過程の中心周波数ω_0との関係は、図－2は、$\omega_0=\omega_1$の場合、図－3は$\omega_0=0.8\omega_1$の場合の計算結果を示している。狭帯域過程による応答では、本解法は、変動係数が0.05程度までシミュレーションと良い一致を示している。

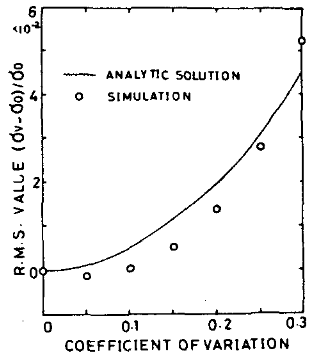

図-1 白色雑音過程入力による定常r.m.s応答

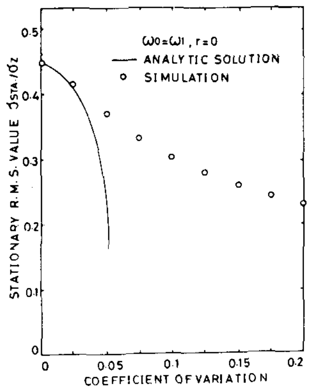

図-2 狭帯域過程入力による定常r.m.s応答

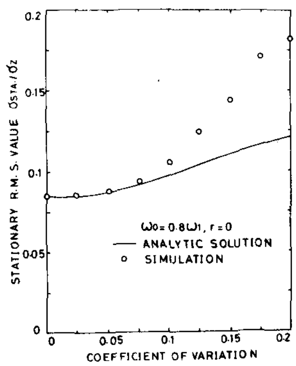

図-3 狭帯域過程入力による定常r.m.s応答