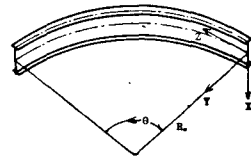


1. まえがき 曲線桁橋の主桁としての薄肉断面はりに関する研究は我が国において特に盛んに行われている。曲線桁橋の主桁の型式は構造上の有利性および経済性を考慮することにより選定され、一般には、ねじりに対する抵抗の大きい箱型断面が採用される場合が多い。しかし最近比較的スパンが短かく、曲率半径の大きい曲線桁橋の主桁として工桁が製作の容易さおよび経済性などの理由により採用される機会が多くなり、ここである。

本報告は薄肉曲線はりの幾何学的非線形性および材料非線形性を考慮したいわゆる複合非線形問題に関する一解析法を提案するものである。解析に必要は薄肉曲線はりの有限変形に関する基礎微分方程式を文献(1)の等価ひずみ関係式を用い、仮想仕事の原理に増分理論を適用して導き、更に導かれた正規型連立微分方程式を複分方程式に変換し、この複分方程式に数値積分法を適用することにより数値的一般解を求める。又材料の非弾性化にもとづく剛性の低下は断面細分割法により求めることとする。

2. 増分形基礎方程式 図1の曲線薄肉曲線はりの有限変形に関するひずみ-変位関係式は次式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= (u_0' - u_0 \frac{1}{R_0}) + \frac{1}{2} u_0'^2 + x \left\{ -u_0'' \cos \varphi - (v_0'' + \frac{1}{R_0} u_0') \sin \varphi - \frac{1}{R_0} \sin \varphi \right\} \\ &\quad + y \left\{ u_0'' \sin \varphi - (v_0'' + \frac{1}{R_0} u_0') \cos \varphi + \frac{1 - \cos \varphi}{R_0} \right\} + \omega \left\{ -\varphi' + u_0' \frac{1}{R_0} \right\} \\ r_s &= \frac{2\pi}{\theta} (\varphi' - u_0' \frac{1}{R_0}) \quad \text{側面断面}, \quad = \frac{\pi}{\theta} (\varphi' - u_0' \frac{1}{R_0}) \quad \text{内面断面} \end{aligned}$$



ここに ϵ_0 , r_s は直ひずみ, セン断ひずみであり, u_0 , v_0 , ω は変位, x, y, z 軸方向変位, φ は Z 軸まわりの断面回転角, $'$ は $R_0 \theta$ に関する微分である。上記のひずみ-変位関係式を用い、仮想仕事の原理に増分理論を適用して薄肉曲線はりの増分形基礎方程式を導き、更に無次元化を行うと次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{dV_z}{d\eta} &= -\frac{dV_z^0}{d\eta} - \frac{L^3}{EI_0} (\delta_z^0 + \delta_z^1) - \frac{L^2}{EI_0} (P_z^0 + P_z^1) \delta(\eta - \xi_1), \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = \psi_z + \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} \varphi_z, \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{EI_0}{\varphi_{J_0} J_0} M_z + \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} \varphi_z \\ \frac{dV_y}{d\eta} &= -\frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} N - \frac{dV_y^0}{d\eta} - \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} N^0 - \frac{L^3}{EI_0} (\delta_y^0 + \delta_y^1) - \frac{L^2}{EI_0} (P_y^0 + P_y^1) \delta(\eta - \xi_2), \quad \frac{d\psi}{d\eta} = -\frac{I_y L^2}{I_{\omega\omega}} \frac{1}{I_{\omega\omega}} M_{\omega} \\ \frac{dN}{d\eta} &= \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} V_y - \frac{dN^0}{d\eta} + \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} V_y^0 - \frac{L^3}{EI_0} (\delta_z^0 + \delta_z^1) - \frac{L^2}{EI_0} (P_z^0 + P_z^1) \delta(\eta - \xi_3), \quad \frac{du}{d\eta} = \varphi_y \\ \frac{dM_z}{d\eta} &= V_z - \varphi_z^0 N + \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} M_z - N \varphi_z - \frac{dM_z^0}{d\eta} + V_z^0 - N^0 \varphi_z^0 + \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} M_z^0 - \frac{L^2}{EI_0} (m_z^0 + m_z^1), \quad \frac{dv}{d\eta} = \varphi_x - \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} w \\ \frac{dM_y}{d\eta} &= V_y - \frac{dM_y^0}{d\eta} + V_y^0 - \frac{L^2}{EI_0} (m_y^0 + m_y^1), \quad \frac{dw}{d\eta} = N \frac{1}{A_y} \frac{I_y}{A_y L^2} - \varphi_z^0 \varphi_y + \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} v \\ \frac{dM_x}{d\eta} &= M_z \left\{ -\frac{d\varphi_z^0}{d\eta} - \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} - \frac{1}{I_{\omega\omega}} M_y^0 \cos \varphi^0 - \frac{1}{I_{\omega\omega}} M_z^0 \sin \varphi^0 \right\} + M_y \left\{ \frac{d\varphi_x^0}{d\eta} - \frac{1}{I_{\omega\omega}} M_y^0 \sin \varphi^0 + \frac{1}{I_{\omega\omega}} M_z^0 \cos \varphi^0 \right\} \\ &\quad + \varphi \left\{ -\frac{1}{I_{\omega\omega}} M_y^0 - \frac{1}{I_{\omega\omega}} M_z^0 - (M_y^0 \cos \varphi^0 + M_z^0 \sin \varphi^0) \left(\frac{d\varphi_z^0}{d\eta} + \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} \right) + (M_y^0 \sin \varphi^0 - M_z^0 \cos \varphi^0) \frac{d\varphi_x^0}{d\eta} \right\} \\ &\quad - \frac{dM_x^0}{d\eta} - M_z^0 \left\{ \frac{d\varphi_x^0}{d\eta} + \frac{1}{R_0} \frac{L}{R_0} \right\} + M_y^0 \frac{d\varphi_x^0}{d\eta} + M_z^0 M_y^0 \left(\frac{1}{I_{\omega\omega}} - \frac{1}{I_{\omega\omega}} \right) - M_y^0 M_z^0 \sin \varphi^0 \frac{1}{I_{\omega\omega}} - M_y^0 M_z^0 \cos \varphi^0 \frac{1}{I_{\omega\omega}} \\ &\quad + M_z^0 M_y^0 \cos \varphi^0 \frac{1}{I_{\omega\omega}} - M_z^0 M_z^0 \sin \varphi^0 \frac{1}{I_{\omega\omega}} - \frac{L^2}{EI_0} (m_x^0 + m_x^1) \\ \frac{dM_{\omega}}{d\eta} &= M_z - \frac{GI_0}{EI_0} J_0 \psi_z - \frac{dM_{\omega}^0}{d\eta} + M_z^0 - \frac{GI_0}{EI_0} J_0 \psi_z^0 - \frac{L}{EI_0} (m_{\omega}^0 + m_{\omega}^1) \\ \frac{d\varphi_z}{d\eta} &= M_z \cos \varphi^0 \sin \varphi^0 \left(-\frac{1}{I_{\omega\omega}} + \frac{1}{I_{\omega\omega}} \right) + M_y \left(-\frac{1}{I_{\omega\omega}} \sin^2 \varphi^0 - \frac{1}{I_{\omega\omega}} \cos^2 \varphi^0 \right) + \varphi \left(-\frac{1}{I_{\omega\omega}} M_y^0 \sin \varphi^0 + \frac{1}{I_{\omega\omega}} M_z^0 \cos \varphi^0 + \frac{d\varphi_z^0}{d\eta} \right) \\ &\quad + M_z^0 \sin \varphi^0 \frac{1}{I_{\omega\omega}} + M_y^0 \cos \varphi^0 \frac{1}{I_{\omega\omega}} + M_z^0 \cos \varphi^0 \sin \varphi^0 \left(-\frac{1}{I_{\omega\omega}} + \frac{1}{I_{\omega\omega}} \right) + M_y^0 - \frac{1}{I_{\omega\omega}} \sin^2 \varphi^0 - \frac{1}{I_{\omega\omega}} \cos^2 \varphi^0 \end{aligned}$$

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \bar{M}_x \left(-\frac{1}{I_{xx}} \cos^2 \varphi - \frac{1}{I_{yy}} \sin^2 \varphi \right) + \bar{M}_y \cos \varphi \sin \varphi \left(-\frac{1}{I_{xx}} + \frac{1}{I_{yy}} \right) + \varphi \left(-\frac{1}{I_{xx}} \bar{M}_y \cos \varphi - \frac{1}{I_{yy}} \bar{M}_x \sin \varphi - \frac{d\varphi}{d\eta} \right) - \frac{1}{R_0} \left(\frac{L}{R_0} \right) \\ - \bar{M}_x \cos \varphi \frac{1}{I_{xx}} - \bar{M}_y \sin \varphi \frac{1}{I_{yy}} + \bar{M}_y \sin \varphi \cos \varphi \left(-\frac{1}{I_{xx}} + \frac{1}{I_{yy}} \right) + \bar{M}_x \left(-\frac{1}{I_{xx}} \cos^2 \varphi - \frac{1}{I_{yy}} \sin^2 \varphi \right)$$

ここで $A_0, R_0, I_0, I_{xx}, J_0$ は各々、断面積、曲率半径、断面2次モーメント、曲率ねじり定数、St Venant のねじり定数に関する基準量である。また $\bar{M}_x, \bar{M}_y$ と $\bar{M}_x, \bar{M}_y$ との関係は次式で与えられる。

$$\bar{M}_x = \bar{M}_x \cos \varphi + \bar{M}_y \sin \varphi - \bar{M}_x \varphi + \bar{M}_y \cos \varphi + \bar{M}_y \sin \varphi, \quad \bar{M}_y = \bar{M}_y \cos \varphi - \bar{M}_x \sin \varphi - \bar{M}_y \varphi + \bar{M}_x \cos \varphi - \bar{M}_x \sin \varphi$$

3. 基礎微分方程式の離散化一般解⁽³⁾

薄肉曲線はりの有限変形に関する正理型微分方程式と変換[0, η]で積分し、積分方程式に変換する。この積分方程式に数値積分法を適用することにより、部材軸座標の任意等分点 i における離散化一般解が右式のごとく表わされる。要素 $a_{xi}, \dots, y_{xi}$ は部材右端を基準にとると、任意等分点 i における諸量 $V_{xi}, \dots, W_{xi}$ と右変換における諸量 $V_{xi}, \dots, W_{xi}$ に関連づけられる要素である。

$$\begin{pmatrix} V_{xi}(0) \\ V_{xi}(1) \\ \bar{N}_{xi}(0) \\ \bar{N}_{xi}(1) \\ \bar{M}_{xi}(0) \\ \bar{M}_{xi}(1) \\ \bar{M}_{xi}(0) \\ \bar{M}_{xi}(1) \\ \phi_{xi}(0) \\ \phi_{xi}(1) \\ \phi_{xi}(0) \\ \phi_{xi}(1) \\ u_{xi}(0) \\ u_{xi}(1) \\ v_{xi}(0) \\ v_{xi}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{110} & a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} & b_{19} & b_{110} & b_{111} & b_{112} & b_{113} & b_{114} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} & c_{18} & c_{19} & c_{110} & c_{111} & c_{112} & c_{113} & c_{114} \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & d_{17} & d_{18} & d_{19} & d_{110} & d_{111} & d_{112} & d_{113} & d_{114} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & e_{17} & e_{18} & e_{19} & e_{110} & e_{111} & e_{112} & e_{113} & e_{114} \\ f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} & f_{18} & f_{19} & f_{110} & f_{111} & f_{112} & f_{113} & f_{114} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & g_{17} & g_{18} & g_{19} & g_{110} & g_{111} & g_{112} & g_{113} & g_{114} \\ h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} & h_{17} & h_{18} & h_{19} & h_{110} & h_{111} & h_{112} & h_{113} & h_{114} \\ i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_{15} & i_{16} & i_{17} & i_{18} & i_{19} & i_{110} & i_{111} & i_{112} & i_{113} & i_{114} \\ j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} & j_{17} & j_{18} & j_{19} & j_{110} & j_{111} & j_{112} & j_{113} & j_{114} \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{110} & k_{111} & k_{112} & k_{113} & k_{114} \\ l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} & l_{16} & l_{17} & l_{18} & l_{19} & l_{110} & l_{111} & l_{112} & l_{113} & l_{114} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & m_{17} & m_{18} & m_{19} & m_{110} & m_{111} & m_{112} & m_{113} & m_{114} \\ n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} & n_{16} & n_{17} & n_{18} & n_{19} & n_{110} & n_{111} & n_{112} & n_{113} & n_{114} \\ o_{11} & o_{12} & o_{13} & o_{14} & o_{15} & o_{16} & o_{17} & o_{18} & o_{19} & o_{110} & o_{111} & o_{112} & o_{113} & o_{114} \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & p_{17} & p_{18} & p_{19} & p_{110} & p_{111} & p_{112} & p_{113} & p_{114} \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} & q_{17} & q_{18} & q_{19} & q_{110} & q_{111} & q_{112} & q_{113} & q_{114} \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} & r_{19} & r_{110} & r_{111} & r_{112} & r_{113} & r_{114} \\ s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} & s_{17} & s_{18} & s_{19} & s_{110} & s_{111} & s_{112} & s_{113} & s_{114} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} & t_{17} & t_{18} & t_{19} & t_{110} & t_{111} & t_{112} & t_{113} & t_{114} \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} & u_{17} & u_{18} & u_{19} & u_{110} & u_{111} & u_{112} & u_{113} & u_{114} \\ v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} & v_{17} & v_{18} & v_{19} & v_{110} & v_{111} & v_{112} & v_{113} & v_{114} \\ w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} & w_{16} & w_{17} & w_{18} & w_{19} & w_{110} & w_{111} & w_{112} & w_{113} & w_{114} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{xi}(0) \\ V_{xi}(1) \\ \bar{N}_{xi}(0) \\ \bar{N}_{xi}(1) \\ \bar{M}_{xi}(0) \\ \bar{M}_{xi}(1) \\ \bar{M}_{xi}(0) \\ \bar{M}_{xi}(1) \\ \phi_{xi}(0) \\ \phi_{xi}(1) \\ \phi_{xi}(0) \\ \phi_{xi}(1) \\ u_{xi}(0) \\ u_{xi}(1) \\ v_{xi}(0) \\ v_{xi}(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{xi}(0) \\ V_{xi}(1) \\ \bar{N}_{xi}(0) \\ \bar{N}_{xi}(1) \\ \bar{M}_{xi}(0) \\ \bar{M}_{xi}(1) \\ \bar{M}_{xi}(0) \\ \bar{M}_{xi}(1) \\ \phi_{xi}(0) \\ \phi_{xi}(1) \\ \phi_{xi}(0) \\ \phi_{xi}(1) \\ u_{xi}(0) \\ u_{xi}(1) \\ v_{xi}(0) \\ v_{xi}(1) \end{pmatrix}$$

4. 複合非線形解析 解析上の主な仮定

- 1) 材料は完全弾塑性体。
- 2) 部材断面の応力状態が非弾性域に入っても平面保持の法則が成立する。
- 3) 残留ひずみと荷重により生じるひずみは重ね合せが成立する。
- 4) St Venant のねじり定数は断面の一部に非弾性域が生じた後も変化しないものとする。
- 5) 断面の各要素の降伏は、主ひずみで決定する。

各荷重段階での各非弾性剛性値は次の手順により求める。

(i) 薄肉曲線はりの横断面を微小要素 ΔA_{ij} に相分割する。

(ii) ある荷重段階での荷重増分に対する、各微小要素 ΔA_{ij} の増分ひずみ $\Delta \varepsilon_{ij}$ を次式より求める。

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{T_x}{A_0 L} \frac{1}{I_{xx}} N + \frac{1}{I_{xx}} \frac{1}{L} M_x \cdot x + \frac{1}{I_{yy}} \frac{1}{L} M_y \cdot y + \frac{T_x}{I_{xx}} \frac{1}{L} M_{\omega} \cdot \omega$$

(iii) 増分ひずみ $\Delta \varepsilon_{ij}$ に前荷重段階での全ひずみ ε_{ij}^0 を加えにひずみを現荷重段階での全ひずみ ε_{ij} とすると

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \Delta \varepsilon_{ij}$$

(iv) 仮定 5) より材料の降伏は主ひずみのみで判定を行う。 $\sigma_{ij} = E \varepsilon_{ij} \quad | \varepsilon_{ij} | \leq \varepsilon_y$

$$\sigma_{ij} = \sigma_y \quad | \varepsilon_{ij} | \geq \varepsilon_y$$

(v) 降伏を考慮した各微小要素 ΔA_{ij} の応力を断面全体について積分し、任意等分点 i における各々の断面を次式のごとく求める。

$$\bar{N} = \int \sigma dA = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sigma_{ij} \Delta A_{ij} \quad \bar{M}_x = \int \sigma x dA = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sigma_{ij} x_{ij} \Delta A_{ij} \\ \bar{M}_y = \int \sigma y dA = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sigma_{ij} y_{ij} \Delta A_{ij} \quad \bar{M}_{\omega} = \int \sigma \omega dA = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sigma_{ij} \omega_{ij} \Delta A_{ij}$$

(vi) 任意等分点 i における各剛性低下率は次式より求める。

$$A_v = \frac{\bar{N}}{N^0 + N} \frac{L^2}{E I_0} A_v^0, \quad I_{xx} = \frac{\bar{M}_x}{M_x^0 + M_x} \frac{L}{E I_0} I_{xx}^0, \quad I_{yy} = \frac{\bar{M}_y}{M_y^0 + M_y} \frac{L}{E I_0} I_{yy}^0, \quad I_{\omega\omega} = \frac{\bar{M}_{\omega}}{M_{\omega}^0 + M_{\omega}} \frac{1}{E I_0} I_{\omega\omega}^0$$

5. 計算例 解析モデルはI型断面を有し、両端単純支持で部材中央に単一集中荷重が作用する曲線はりである。

ひねり角は円断面は省

略した。

参考文献

- (1) 薄木：工学会 263 1977
- (2) 崎山、栗家：長工学会 8号 1977
- (3) 西田：名古屋大工学部 1980
- (4) 金子、今井、西田：234 鋼構 1979

