202—(7)

応力集中問題の一解析法

八代工業高等専門学校 正員 ○水田洋司
熊本大学工学部 正員 平井一男

1. はじめに

本論文は離散化モデルの応力集中問題を解析する方法について述べている。応力集中の起こる部分では、応力勾配が急変するため、他の部分よりも小さな要素を用いる必要がある。大きな要素と微小な要素の混在するモデルでは、数値計算上の誤差が生じる可能性がある。これを防ぐために、まず粗い要素を用いて解析し、次に応力集中部を取り出して細かい要素で再分割し、粗い要素の解析結果より得られる境界条件を与えて解析し、さらに前よりも小さな部分を取り出して解析するということを繰り返す方法がある[1]。しかし、この方法は、境界条件が一つ前の解析結果で規定されるため、応力集中部をより細かい要素に分割し直したことによる他の部分への影響がフィードバックされない。本論文では、境界条件を規定することなしに次々に要素を細かくする方法（ズーム）について述べる。要素を細かく分割すると剛性マトリックスの自由度はもとの系より増加するが、これを処理するために拡大されたマトリックス[2]の考え方を導入している。

2. 拡大マトリックス

式(1)のような分割マトリックスからなる剛性マトリックスの逆マトリックスは、分割法[3]により直接求めると、式(2)のように与えられる。

$$K=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \qquad (1) \qquad\qquad K^{-1}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11}^{-1}+WZ^{-1}Y & -WZ^{-1} \\ -Z^{-1}Y & Z^{-1} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ここに、

$$W=K_{11}^{-1}K_{12} \quad (3) \qquad Y=K_{21}K_{11}^{-1} \quad (4) \qquad Z=K_{22}-YK_{12} \quad (5)$$

次に、剛性マトリックスの K_{22} に相当する構造物の要素が細分割されると、式(1)は次式のように書き表わされる

$$K^{*}=\begin{bmatrix} K_{11}^{*} & K_{12}^{*} \\ K_{21}^{*} & K_{22}^{*} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22}+K_{ii} & K_{ij} \\ 0 & K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

。この式に式(1)と式(2)の関係を利用して、撓性マトリックスの拡大された部分に相当する f_{22}^{*} の逆マトリックスとなる Z を求めると、

$$Z=\begin{bmatrix} K_{22}-K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}+K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{22}^{-1}+K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

となる。これより拡大された後の剛性マトリックスの逆マトリックスは

$$\begin{bmatrix} f_{11}^{*} & f_{12}^{*} \\ f_{21}^{*} & f_{22}^{*} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11}^{-1}+Y^{T}(\bar{Z}^{-1})Y & SYM. \\ -\bar{Z}^{-1}Y & Z^{-1} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

と表わせる。但し、式(8)の $\bar{Z}$ は拡大前の K_{22} の大きさと同じ列をもつ矩形マトリックスである。

3. ズーム解析

拡大されたマトリックスを用いて、力と変位の関係を表わすと次式のようになる。ここに、添字 i は拡大され

た部分（ズーム部）に無関係であり、添字２は拡大された部分を表わす。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{-1}Y^T(\overline{Z}^{-1})Y & SYM. \\ -\overline{Z}^{-1}Y & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

拡大された部分（ズーム部）の変位 X_2を求める式は式(10)となる。また、応力集中部、ズーム部に外力が作用していない場合には、$F_2=0$となり式(11)で表わされる。つまり、１回のズームにおいて、Z^{-1}とYが求まれ

$$X_2 = -\overline{Z}^{-1}YF_1 + Z^{-1}F_2 \qquad (10) \qquad\qquad X_2 = -\overline{Z}^{-1}YF_1 \qquad (11)$$

は、X_2は式(11)より求められ、変位X_2を用いて応力集中部の応力が求められる。この時のZ^{-1}とYはそれ

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} f_{22}^{-1}+K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (12) \qquad\qquad Y = -f_{22}^{-1}f_{21} \qquad (13)$$

それ、式(12)、式(13)で与えられる。式(12)、(13)と式(11)の関係を図に表わすと図-1のようになる。２回目のズームの場合には、１回目のズーム部の$(Z^{-1})_1$の中の２回目のズーム部に相当する所が新しいf_{22}^*となる。そして、式(12)より新しいZ^{-1}を求め、式(11)より変位を求める。この操作を繰り返すことによって何回もズームすることが可能である。$\overline{Z}^{-1}Y$の値も全部求める必要はなく、F_1が作用している部分のみを求めておけばよい。

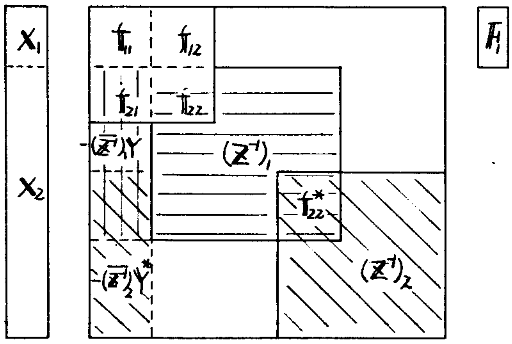

図-1. 要素の細分割に対応するマトリックスの拡大

4. 数値計算

計算例として図-２のような半円切り欠きを有する平板モデルを考える[3]。ここでは三角形要素を用い平面応力問題として解析している。

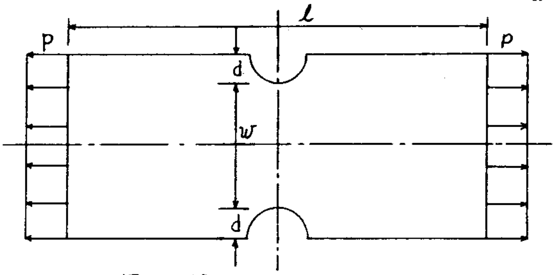

図-２ 半円切欠きモデル

表-1 モデルの諸元

諸　元	数値
分布荷重(p)	1 kg/mm²
長　さ　(l)	20 mm
巾　(w)	8 mm
板　厚(t)	1 mm
円孔半径(r)	1 mm
切欠深さ(d)	1 mm
ポアソン比(ν)	0.3

5. おわりに

提案法では、Z^{-1}をズーム（細分割）ごとに求める必要があるため、ズーム回数が多くなるに従い、その誤差も大きくなることが懸念され、その影響の度合を調べる必要があると思われ、これからの研究課題としたい。この手法は、マトリックスの自由度の増減が自由にできるため、ひびわれ進行の追跡にも適用できるであろう。数値計算は九大電算センターのM-200を用いており、図-２のモデルを171分割した時、直接法ではC.P.U. Timeが10秒、４回ズームで処理した提案法では６秒であった。また、応力集中係数の誤差は２回ズームで0.8%であり、回数が増すにつれ少し悪くなるようである。

（参考文献）

(1) 宮本博：有限要素法と破壊力学，コンピューターによる構造工学講座Ⅱ-3-B，日本鋼構造協会編，培風館．

(2) 筒井光男：拡大された剛性マトリックスの解析とその応用，熊本大学工学部土木工学科修士論文，1975．

(3) 古屋茂：行列と行列式，培風館，pp.62～65，1959．