202—(6)　4階等方テンソルのマトリックス解析
——一般弾性定数のマトリックス——

熊本大学工学部　正員　三池亮次

1．要旨　4階テンソルにおいても，2階テンソルで用いられる通常の座標変換マトリックス L を拡張した，広義の座標変換マトリックス $L^{(2)}=L\otimes L$ が存在することを述べ，この $L^{(2)}$ を用いて，4階等方テンソルとしての弾性定数マトリックス $\mathbb{C}$ の成分の間に満足すべき，必要十分の条件を検討する。

2．2階テンソルのマトリックス　応力テンソル $T=[\tau_1\ \tau_2\ \tau_3]$ とひずみテンソル $E=[e_1\ e_2\ e_3]$ は2階テンソルであり $T^{**}=L^TTL$，$E^{**}=L^TEL$ の変換を受ける。この3行3列のマトリックスで与えられる T および T^{**} を $\tau^T=[\tau_1^T\ \tau_2^T\ \tau_3^T]$，$\tau^{**T}=[\tau_1^{**T}\ \tau_2^{**T}\ \tau_3^{**T}]$ のようなベクトルで表示するとき，変換マトリックスは

$$\tau^{**}=L^{(2)T}\tau \qquad \text{同様} \qquad e^{**}=L^{(2)T}e \tag{1}$$

ここに

$$L^{(2)T}=\begin{bmatrix} l_{11}L^T & l_{12}L^T & l_{13}L^T \\ l_{21}L^T & l_{22}L^T & l_{23}L^T \\ l_{31}L^T & l_{32}L^T & l_{33}L^T \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\otimes L^T=L^T\otimes L^T \tag{2}$$

のようになる。$L^{(2)}$ は直交マトリックスであって，$L^{(2)T}\otimes L^{(2)}=I$ であることも容易に証明することができる。また式(1)は成分形では，$\tau_{ij}^{**}=l_{in}l_{jn}\tau_{mn}$ のように与えられることは周知のとおりである。

3．4階テンソル　ある座標系およびそれとは，L の傾斜をなす座標系における応力 τ とひずみ e の間に，構成方程式

$$\tau=\mathbb{C}e\ ,\quad \tau^{**}=\mathbb{C}^{**}e^{**} \tag{3}$$

が成立するものとする。$\mathbb{C}$ は弾性定数マトリックスである。式(3)の第2式と式(1)より

$$\tau=(L^{(2)}\mathbb{C}^{**}L^{(2)T})e$$

を得，これと式(3)の第1式より，$\mathbb{C}$ は4階テンソルとしての変換

$$\mathbb{C}^{**}=L^{(2)T}\mathbb{C}L^{(2)} \tag{4}$$

を受けることがわかる。$\mathbb{C}$ の要素を

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} \end{bmatrix}\ ,\qquad \mathbb{C}_{ij}=\begin{bmatrix} C_{i1j1} & C_{i1j2} & C_{i1j3} \\ C_{i2j1} & C_{i2j2} & C_{i2j3} \\ C_{i3j1} & C_{i3j2} & C_{i3j3} \end{bmatrix} \tag{5}$$

とすると，式(4)は，成分形では，$C_{iujv}=l_{ix}l_{jm}l_{ux}l_{vy}C_{xxmy}$ と表わされる。また，式(4)において，座標変換の如何にかかわらず $\mathbb{C}^{**}=\mathbb{C}$ であるとき $\mathbb{C}$ は等方4階テンソルである。

4．弾性定数マトリックス　異方性および等方性弾性体において，$\mathbb{C}$ がどのような値をとるかについて，すでに多くの研究がある。ここでは，変換マトリックス $L^{(2)}$ の応用例として，等方4階テンソルとして $\mathbb{C}$ の要素間に具備すべき必要十分の条件を検討する。

(1)　3つの直角な，i, j, k 軸方向に異なる性質のある物質　i 軸のまわりに180°座標軸を廻転すると原座標系に対する新座標系の変換マトリックスは，

$$l_{ij}=\delta_{ij}\ ,\quad l_{jk}=-\delta_{ij} \qquad (\delta_{ij}\text{はクロネッカーのデルタ記号}) \tag{6}$$

となる。また，弾性定数は新座標系においても変わらない。式(4)は，総和規約を用い，

$$\mathbb{C}^{**}_{ij} = l_{ik} l_{jn} L^T C_{kn} L \qquad (7)$$

のように表わされるから，式(6)を上式に用い，また $\mathbb{C}^{**}_{ij} = \mathbb{C}_{ij}$ であるから，$\mathbb{C}_{ii} = l_{ik} l_{im} L^T \mathbb{C}_{km} L = L^T \mathbb{C}_{ii} L$，すなわち $C_{iuiv} = l_{um} l_{vn} C_{imin}$ を得，したがって $C_{iiii} = l_{im} l_{in} C_{imin} = \delta_{im}\delta_{in} C_{imin} = C_{iiii}$，$i \neq j$ のとき $C_{iiij} = l_{im} l_{jn} C_{imjn} = \delta_{in}(-\delta_{jn}) C_{imin} = -C_{iiij} = 0$，同様 $C_{ijii} = 0$，また，$i \neq j$，$i \neq k$ に対して $C_{ikij} = l_{km} l_{jn} C_{imin} = \delta_{km}\delta_{jn} C_{imin} = C_{ikij}$，したがって $\mathbb{C}_{ii}$ の要素は図-1 (a) に示すとおりとなる。同様の手法を用いて，$\mathbb{C}_{ij}$ $(i \neq j)$ および $\mathbb{C}_{jk}$ $(i \neq j, i \neq k)$ は図-1 (b), (c) のとおりとなる。

	i	j	k
i	C_{iiii}	0	0
j	0	C_{ijij}	C_{ijik}
k	0	C_{ikij}	C_{ikik}

(a) $\mathbb{C}_{ii}$ の要素

	i	j	k
i	0	C_{iijj}	C_{iijk}
j	C_{ijji}	0	0
k	C_{ikji}	0	0

(b) $\mathbb{C}_{ij}$ の要素

	i	j	k
i	C_{jiki}	0	0
j	0	C_{jjkj}	C_{jjkk}
k	0	C_{jkkj}	C_{jkkk}

(c) $\mathbb{C}_{jk}$ の要素

図-1 i 軸のまわりに180°廻転した新座標系においても，弾性定数が変わらない条件

小マトリックス $\mathbb{C}_{ii}$ について言えば，i 軸のまわりに座標軸を180°廻転する場合は (a) 形であり，j 軸のまわりに廻転する場合は (c) 形，k 軸のまわりに廻転する場合も (c) 形である。これより $\mathbb{C}_{ii}$ は対角マトリックスであることがわかる。同様，$\mathbb{C}_{ij}$ $(i \neq j)$ の要素は図-2 に示すとおりとなる。以上により，一般に，非零要素は，C_{pppp}，C_{pqpq}，C_{ppqq}，C_{pqqp} $(p \neq q)$ の4つのタイプで構成されることがわかる。

	i	j	k
i	C_{iiii}	0	0
j	0	C_{jjjj}	0
k	0	0	C_{kkkk}

$\mathbb{C}_{ii}$ の要素

	i	j	k
i	0	C_{iijj}	0
j	C_{ijji}	0	0
k	0	0	0

$\mathbb{C}_{ij}$ の要素

図-2 i, j, k 軸のまわりに180°廻転しても弾性定数が変わらない条件

(2) 3つの直角方向に異なった性質のある物質であって，しかも i 軸のまわりには，90°座標軸を廻転しても，弾性定数は変わらない場合．　i 軸のまわりに90°座標軸を廻転して得られる新座標系の変換マトリックスの要素 $l_{im} = \delta_{im}$，$l_{mn} = e_{imn}$ $(m \neq i, n \neq i$，e_{imn} は置換テンソル$)$を用いると，11個の独立の弾性定数が得られる。

(3) 立方晶系　(2)において，廻転軸を順に i, j, k と変えていく。その何れに対しても弾性定数は変わらない性質，すなわち，何れの軸のまわりに90°廻転しても弾性定数は変わらない条件より，独立の弾性定数は C_{iiii}，C_{ijij}，C_{ijij}，C_{ijji} の4個であることがわかる。

(4) 等方弾性体の弾性定数　式(7)において，指標を変え

$$\mathbb{C}_{pq} = l_{pm} l_{qn} L^T \mathbb{C}_{mn} L = L^T A L \qquad (8)$$

とする。A の要素を A_{uv} とおくと，$\mathbb{C}_{pq}$ の要素は，少くとも立方晶系における上記の4弾性定数で構成され，

$$C_{pmqn} = l_{mu} l_{nv} A_{uv}$$
$$= \delta_{pq}\delta_{mn} C_{ijij} + \delta_{np}\delta_{mq} C_{ijji} + \delta_{pm}\delta_{qn} C_{iijj} + \alpha\left(C_{iiii} - C_{ijij} - C_{ijji} - C_{iijj}\right) \qquad (9)$$

ここに

$$\alpha = l_{mi} l_{ni} l_{pi} l_{qi} + l_{mj} l_{nj} l_{pj} l_{qj} + l_{mk} l_{nk} l_{pk} l_{qk} \qquad (10)$$

となる。上式(9)が恒等的に成立するためには，任意の p, q に対して

$$C_{iiii} = C_{iijj} + C_{ijij} + C_{ijji} \qquad (11)$$

$$C_{pmqn} = \delta_{pq}\delta_{mn} C_{ijij} + \delta_{pn}\delta_{qm} C_{ijji} + \delta_{pm}\delta_{qn} C_{iijj} \qquad (12)$$

式(12)において $m = n = p = q$ とおくと，式(11)を得，また，$C_{ppqq} = C_{iijj}$，$C_{pqpq} = C_{ijij}$，$C_{pqqp} = C_{ijji}$，それ以外の m, n に対して $C_{pmqn} = 0$ $(m \neq p, q$，また $n \neq p, q)$ であることも容易にわかる。式(12)が，$\mathbb{C}$ が4階等方テンソルであるための必要十分の条件である。