202－(2)　　非定常熱伝導に対する境界要素法

福岡大学　理学部　正員 ○ 大西和栄，大浦洋子，小畑紹子

**1．** はじめに　　非有界な領域や特異点をもつ非定常熱伝導問題に対する有効な近似解法として，境界要素法 (BEM) は期待される。 本報では時間に依存した基本解[1]を使って導かれた温度の積分表示に，時空間の境界要素 を 導入し，時間方向に逐次積分して近似解を求める計算法を考える。[2-4]

本報の目的は，有界な凸領域における滑らかな温度分布をもつ熱伝導問題について， (i) 実用的な数値積分公式を示すこと， (ii) BEM に特徴的な数値計算の Techniques を述べること， (iii) 近似解の収束性と安定性を報告することである。

**2．** 境界要素近似法　　$\Omega$ を $xy$- 平面上の有界な凸領域とし，時刻 $t_0$ と $T$ 間の時空領域を $R=\{(P,t)/P=(x,y)\in\Omega, t_0<t\leq T\}$，$\Omega$ の境界を $\Gamma$，$R$ の側面を $S$ で表す。 熱源のない熱伝導方程式の初期値・境界値問題

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda\nabla^2\right)u=0 \quad (1), \qquad u(P,t_0)=u^0(P) \quad (2),$$

$$u(P,t)=\bar{u}(P) \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3), \qquad -\lambda\frac{\partial u}{\partial\nu}=\bar{q}(P) \quad \text{on } \Gamma_q \quad (4)$$

を考える。 ここに $u$ (Kelvin単位) は温度，$\lambda$ $(m^2/s)$ は等方均質な熱媒体での熱伝導係数，$u^0$ は与えられた初期温度分布，$\bar{u}$ は $\Gamma$の一部 $\Gamma_u$ に沿って与えられた境界温度分布， $\bar{q}$ $(J/m^2\cdot s)$ は $\Gamma_q=\Gamma-\Gamma_u$ に沿って与えられた外向法線方向 $\nu$ の熱 Flux である。基本解を $v^*$，$v^*$ の Flux を $q^*=-\lambda\partial v^*/\partial\nu$ とおくと，温度 $u$ について次の積分表示を得る。

$$\begin{aligned} c(P)u(P,T) &- \int_S u(Q,t)q^*(Q,t;P,T)\,dS \\ &= -\int_S q(Q,t)v^*(Q,t;P,T)\,dS + \int_\Omega u^0(Q)v^*(Q,t_0;P,T)\,dQ \end{aligned} \qquad (5)$$

ここに $c(P)$ は点 $P$ における重みを表し，$P$ が $\Omega$ の内点ならば $c=1$， $\Gamma$ の滑らかな境界上の点ならば $c=1/2$，角 $\theta$ を成す境界上の点ならば $c=\theta/2\pi$ であり，$Q$ は積分変数である。

側面 $S$ を小さな時空長方形 (Patch) に要素分割し，Lagrangeの双一次関数を使って $u, q$ を補間し，底面 $\Omega$ を小さな三角形に要素分割して一次の形状関数で $u^0$ を補間する。 これらの離散化を式 (5) に施して境界要素方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c(P_N) \end{bmatrix} \left\{ u^n \right\}_\Gamma &- \sum_{k=0}^{n} \left[ \tilde{H}^k \right] \left\{ u^k \right\}_\Gamma \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \left[ \tilde{G}^k \right] \left\{ q^k \right\}_\Gamma + \left\{ \tilde{b}^n \right\}_\Omega \end{aligned} \qquad (6)$$

が得られる。 ここに， $P_j$ $(j=1,2,\cdots,N)$ は境界上の節点， $N_T=(T-t_0)/\Delta t$ ( $\Delta t$ は時間刻み) として $n$ は $0<n\leq N_T$， $\{u^k\}_\Gamma$ は時刻 $t_k=t_0+k\Delta t$ における境界節点温度 Vector， $\{q^k\}_\Gamma$ は境界節点熱 Flux vector， $\{\tilde{b}^n\}_\Omega$ は式 (5) 左辺第二項の近似積分を表す。

今，時刻 $t_k$ $(0\leq k\leq n-1)$ までの $\{u^k\}_\Gamma$, $\{q^k\}_\Gamma$ はすでに計算されているものと仮定する。 境界条件式（3），（4）を式（6）に代入する。 連立一次方程式（6）を解いて $\Gamma_u$ 上における未知の節点熱 Flux $q_j^n$ と，$\Gamma_q$ 上における未知の節点温度 $u_j^n$ が求まる。

## 3． 数値解析

（i） 数値積分公式 ―― 近似解に対して高い精度（相対誤差 $10^{-7}$ 以下）を得るためには，側面 $S$ 上で 20×20 点の Gaussの数値積分公式,[5] 底面 $\Omega$ 上で 12 点の Hammer 数値積分公式[6]を必要とし，倍精度で計算すると $N=20$ でさえ 90 分かかる（ on ACOS 600 ）。 重みをかけた境界点の近く（ 1標準偏差を $\sigma=\sqrt{2\lambda\Delta t}$ として， $3\sigma$ 以内の $t_{n-2}\leq t\leq t_n$）の Patchに対してのみ 10×10 点 Gauss 公式を使い，残りの Patchでは 2×2 点 Gauss公式，底面$\Omega$では 3点の Hammer 公式を使えば実用上（相対誤差 $10^{-3}$ 以下，計算時間10分程度）十分である。

（ii） 数値計算技術 ―― 凸領域に対しては式（6）の係数行列の条件数が高くないので単精度計算でよい。 重み $c(P)$ は公式 $\theta/2\pi$ で決定した方が精度が良い。 Brebbia の提案する方法（Application of a uniform potential[7]）で決定すると精度が悪い。 2 種の境界 $\Gamma_u$ と $\Gamma_q$ とが接続する節点や，$\Gamma$ の角のために熱 Flux が不連続となる境界節点においては，2 重点（ Double points，同じ座標をもち異なる節点番号をもつ 2点）を導入すると，境界条件式（3），（4）の処理が容易で精度も良い。 $\Omega$ の内点における温度， $x, y$ 方向の熱 Flux は式（5）を微分したものから計算され，精度は境界点に対するものと同等である。

（iii） 収束性と安定性 ―― 境界節点間隔の代表長さを $\Delta\Gamma$ ，$\Omega$ の要素分割の代表長さを $h$，逐次積分の時間刻みを $\Delta t$ とすると真の解 $u(P_j, t_n)$ に対する境界要素近似解 $u_j^n$ は

$$\max_{1\leq j\leq N} |u(P_j, t_n) - u_j^n| < C_1\{\Delta\Gamma^2 + \Delta t^2 + h^2\} e^{C_2(t_n - t_0)} \tag{7}$$

となって，無条件一様収束する。 次に $\|\{u^k\}_\Gamma\|_\infty \leq M$ , $\|\{q^k\}_\Gamma\|_\infty \leq M$ なる有界性を仮定する。 低次の数値積分公式を用いたために式（6）の係数に $\|[\Delta\tilde{H}^k]\|_\infty < \rho_1(\Delta t)$ , $\|[\Delta\tilde{G}^k]\|_\infty < \rho_1(\Delta t)$ , $\|\{\Delta\tilde{b}^n\}\|_\infty < \rho_2(h)$ の計算誤差が混入した場合，これに伴う近似解 $\{u^n\}_\Gamma$ の摂動 $\{\Delta u^n\}_\Gamma$ は

$$\|\{\Delta u^n\}_\Gamma\|_\infty < \varkappa \left[ C_3\left(M\Delta t + \frac{\rho_1(\Delta t)}{\Delta t}\right) + \rho_2(h) \right] e^{\varkappa C_4(t_n - t_0)} \tag{8}$$

で評価される。 式（6）の係数ばかりでなく，$u^0$ や$\bar{q}$にも $\Delta u^0, \Delta\bar{q}$ の摂動を受ける場合，これらに伴う摂動 $\{\Delta u^n\}_\Gamma$ は

$$\|\{\Delta u^n\}_\Gamma\|_\infty < \varkappa \left[ C_5\|\{\Delta u^0\}_\Omega\|_\infty + C_6\|\{\Delta q\}_\Gamma\|_\infty + C_7\frac{\rho_1(\Delta t)}{\Delta t} \right] e^{\varkappa C_4(t_n - t_0)} \tag{9}$$

となり，近似式（6）は一様安定であることが証明される。 ただし，上記 $C_j$ $(1\leq j\leq 7)$ は定数であり，$[E^n]=[c(P_j)]-[\tilde{H}^n]$ とおくとき $\varkappa = \|[E^n]^{-1}\|_\infty / (1 - \|[E^n]^{-1}\|_\infty \|[\Delta\tilde{H}^n]\|_\infty)$ である。

終りに，境界要素法は本学土木工学科黒木健実助教授に御指導いただいた。 プログラムは伊藤朋子助手が開発された。 本論文は昭和55年文部省科学研究費による研究の一部です。

参考文献 1) Carslaw,H.S. and Jaeger,J.C., Conduction of Heat in Solids. **2**, XIV , Clarendon Press Oxford (1959), 2) Chang,Y.P. *et al*., Int.J.Heat Mass Transfer, **16**, 1905-1918 (1973), 3) Shaw,R.P., *id*., **17**, 693-699 (1974), 4) 大西和栄，黒木健実，第30回応力連合抄録集，D109，237-238 (1980)， 5) 山下真一郎，情報処理，**5**，No.4，206-215 (1964)， 6) Strang,G. and Fix,G.J., An Analysis of the F E M, p.184 , Prentice Hall , New Jersey (1973)， 7) Brebbia,C.A. and Walker,S., Boundary Element Techniques in Engineering, p.171, Newnes-Butterworths, London (1980)