202—(1)　　境界要素法による熱応力解析

福岡大学　正 ○ 黒木健実，正　大西和栄，伊藤朋子

1．まえがき　　境界要素法 (BEM)を有限要素法を補う実用的近似解法とするには，数値実験による経験の積み重ねが必要であろう。本報では熱応力問題の BEMによる定式化と，その数値計算技術について検討する。定常状態では温度 Potentialとそれに基づく弾性変位の解析によって，熱応力が明らかにされる。[1] 非定常状態になると温度場の計算に二通りの方法がある。一つは時間変数と空間座標の関数となる基本解を用いる方法であり，[2-4] 他の一つは時間変数に対して Laplace変換を用いる方法である。[5] ここでは，より直接的な解法である前者を採る。以下では平面熱弾性問題を対象とし，積分方程式の離散化は最も簡単な Constant Element Boundary Approximations[6] による。

2．支配方程式と積分表示　　時間変数を t，空間座標を $x_i\,(i=1,2)$ で表す。熱媒体としての材料 Ω は (i) 等方均質で (ii) 熱流束 q は Fourierの法則に従い (iii) 各係数は温度 T に依存しないと仮定する。内部熱源のない Energy 保存則

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}=0 \quad \text{in} \quad \Omega \ , \quad \text{ただし} \quad q_i=-K\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{1}$$

と，初期値 T^0，境界 Γ 上で二つの境界条件 $T(t,x_i)=\overline{T}$ on Γ_T，$q=q_in_i=\overline{q}$ on Γ_q を考える。ここで，n_i は Γ 上の外向方線の方向余弦である。

一方，熱弾性については微小変位を仮定し，次のつりあい方程式，応力－ひずみ関係式，ひずみ－変位関係式を考える。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}=0 \ , \quad \sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ll}+2\mu\varepsilon_{ij}+\sigma_{ij}^0 \ , \quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{in} \quad \Omega \ . \tag{2}$$

境界 Γ に沿って $P_i=\sigma_{ij}n_j=\overline{P}_i$ on Γ_σ，$u_i=\overline{u}_i$ on Γ_u が与えられる。ただし δ_{ij}= Kronecker の delta，Lamé定数 λ,μ は $\lambda=2G\nu/(1-2\nu)$，$\mu=G$，ここに G= せん断弾性係数，ν= Poisson 比，$\sigma_{ij}^0=-\alpha(T-T^0)\delta_{ij}E/(1-2\nu)$，$\alpha$= 線膨張係数，$E$= Young 率である。

τ 時刻に Q 点に unit heat charge をかけたとき，P 点における t 時刻の温度は式 (1) の解として

$$T(P,t;Q,\tau)=0 \quad (t<\tau) \ , \quad =\left(\frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi(t-\tau)}}\right)^2\mathrm{Exp}\left[-\frac{r^2}{4\kappa(t-\tau)}\right] \quad (\tau<t)$$

で与えられる。ただし $\kappa=K/\rho c$，$r=\overline{QP}=\sqrt{(x_l^Q-x_l^P)^2}$ とし，$T^*(P,t;Q,\tau)=T(Q,\tau;P,t)$ とおく。一方，P 点に k 方向の unit load をかけたとき，Q 点の l 方向の変位を $u_l^k=u_l^k(P,Q;t)$ (以下 t を省略する) とおく。Dirac の delta関数を δ で表すとき，式 (2) から導かれる方程式

$$\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_j^k}{\partial x_i\partial x_j}+G\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial x_j^2}+\delta(Q-P)\delta_{ki}=0 \tag{3}$$

の平面ひずみ問題に対する解は

$$u_l^k=\frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left[-\delta_{kl}(3-4\nu)\ln r+\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_l}\right]$$

で与えられる。これが変位の基本解である。Γ 上の応力 $p_l^k=p_l^k(P,Q)$ は次のように表される。

$$p_l^k=\frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\nu)\delta_{kl}+2\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_l}\right\}-(1-2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}n_k-\frac{\partial r}{\partial x_k}n_l\right)\right] \ .$$

時間 t_0 から t_1 における Γ 全体を S で表し，Q 点の座標を x_i^Q とする。 いま，$q^*=q_i^* n_i$ ただし $q_i^*=-K\partial T^*/\partial x_i^Q$, $\varepsilon_{ij}^k=\frac{1}{2}(\partial u_i^k/\partial x_j+\partial u_j^k/\partial x_i)$ とおく。 離散化に必要な積分方程式は

$$\gamma T(P,t)-\int_S q^* T dS=-\int_S qT^* dS+\int_\Omega \rho c T^0 T^* d\Omega \quad , \tag{4}$$

$$\gamma u_k(P)+\int_\Gamma p_j^k u_j d\Gamma=\int_\Gamma p_j u_j^k d\Gamma-\int_\Omega \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^k d\Omega \tag{5}$$

である。 ただし P が Ω の内点ならば $\gamma=1$ ，滑らかな Γ 上の点ならば $\gamma=1/2$ となり，ε_{ij}^k は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{ij}^k=\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r}\left[-(1-2\nu)\left(\delta_{ki}\frac{\partial r}{\partial x_j}+\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}-2\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right] . \tag{6}$$

3. 境界要素近似 近似的に境界 Γ を N_Γ 個の線分に細分し，第 Q 番目の線分を Γ_Q で表す。各線分(Boundary Element)の中点を節点(Boundary Node) に選び，各 Element上で区分的に一定であるような形状関数を用いて，温度 T，変位 u_j，表面力 p_j を補間する。 領域 Ω を N_Ω 個の三角形要素に分割し，第 e 番目の要素を Ω_e で表す。 各 Ω_e の三辺の中点を節点に選び区分的一定な補間関数を用いる。

温度に関する式（4）は次のように離散化される。

$$\gamma T(P,t)-\sum_{Q=1}^{N_\Gamma} T(Q,t)\int_{\Gamma_Q}\int_{t-\Delta t}^{t} q^*(Q,\tau;P,t)\frac{(\tau-t+\Delta t)}{\Delta t}d\Gamma d\tau=-\sum_Q q(Q,t)\int_{\Gamma_Q}\int_{t-\Delta t}^{t}+\sum_{e=1}^{N_\Omega}\int_{\Omega_e}\rho c T^0 T^* d\Omega+r(P,t) \tag{7}$$

ここに，$r(P,t)$ は $\tau<t$ の T と q の境界値より計算される項で，すでに求められていると仮定する。Δt は積分の時間刻みである。 式（7）を式（1）の q_i に代入すれば内部の熱Flux q が求められる。

変位と表面力に関する式（5）は次のように離散化される。

$$\gamma u_k(P)+\sum_{Q=1}^{N_\Gamma} u_j(Q)\int_{\Gamma_Q} p_j^k(P,Q)d\Gamma=\sum_Q p_j(Q)\int_{\Gamma_Q} u_j^k(P,Q)d\Gamma-\sum_{e=1}^{N_\Omega}\int_{\Omega_e}\sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij}^k d\Omega \ . \tag{8}$$

式（8）を式（2）の ε_{ij} に代入し，次いで ε_{ij} を σ_{ij} に代入すれば内部応力 σ_{kl} は次のように表される。

$$\sigma_{kl}=-\sum_{Q=1}^{N_\Gamma} u_j(Q)\int_{\Gamma_Q} S_{jkl}d\Gamma+\sum_Q p_j(Q)\int_{\Gamma_Q} D_{jkl}d\Gamma-\sum_{e=1}^{N_\Omega}\int_{\Omega_e}\sigma_{ij}^0 F_{ijkl}d\Omega+\sigma_{ij}^0 \tag{9}$$

ただし

$$F_{ijkl}=\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2}\Big[-\delta_{kl}\delta_{ij}(1-4\nu)+(1-2\nu)\left(2\delta_{kl}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}+\delta_{ki}\delta_{lj}+\delta_{kj}\delta_{li}\right)+2\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_l}$$
$$+2\nu\left(\delta_{ki}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_l}+\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_l}+\delta_{li}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}+\delta_{lj}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)-8\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_l}\Big] .$$

S_{jkl} , D_{jkl} については Brebbia[7) に示されている。

終りに，本論文は昭和55年度文部省科学研究費による研究の一部である。

参考文献 1) Rizzo,F.J. and Shippy,D.J., Chap.7, in : *Developments in Boundary Element Methods-1*, Banerjee,P.K. *et al.*,(eds.), Applied Science Publishers (1979), 2) Chang,Y.P. *et al.*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **16**, 1905-1918 (1973), 3) Shaw,R.P., *id.*, **17**, 693-699 (1974), 4) 大西和栄，他，55年度研究発表会講演集，土木学会西部支部 (1981), 5) Rizzo,F.J. and Shippy,D.J., *AIAA Journal*, **8**, No.11, 2004-2009 (1970), 6) Brebbia,C.A. and Walker, S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London (1980), 7) Brebbia,C.A., *The B. E. M. for Engineers*, p.130, Pentech Press, London (1978).