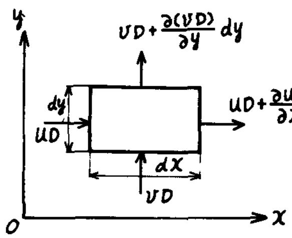
402−2　　人口動態に関する一理論　　S 55・2

九州大学工学部　○学生員　永尾　祐治
九州大学工学部　正会員　樗木　武

1、まえがき　都市における人口動態を論ずるものとして、経済モデル，土地利用モデル的なアプローチや重回帰分析，重力モデル，アクセシビリティ的考察など様々の手法が従来より用いられてきた。これらの手法は、人口動態のマクロ的考察を行う上で有効な手法といえるが、都市内細部にわたる人口動態や分布を論ずる上で、必ずしも満足のいく手法とはいえない面がある。すなわち、都市及びその周辺地域における人口動態は、地形，土地利用分布，地価，行政上の制約等の諸要因による影響を受けながら、ポテンシャル フロー的な流動を示し、高人口密度地域から低人口密度地域への人の動きがあることは周知のとおりであるが、その説明を行う上で、従来のモデルには難点があるといえる。

そこで本研究では、ポテンシャル・フロー的発想を基盤として、人口動態を流体相似し、人口密度に関する支配方程式の誘導及びその解析手法の確立を行なわんとするものであり、これにより都市内人口の細部にわたる分布及び移動を説明することを企図するものである。

2、解析概要　対象地域に基準直交座標系x,yを導入し、その微小要素$dxdy$を取り出すものとする。微小要素内の人口$Ddxdy$に対する出生、死亡、対外部流出入と境界よりのポテンシャル・フロー的な人口移動とで、人口の流出入に関する収支を考えれば、次の連続方程式が得られる。



$$-\frac{\partial(uD)}{\partial x}-\frac{\partial(vD)}{\partial y}+(\alpha-\beta+\gamma)D=\frac{\partial D}{\partial t} \quad —(1)$$

ここにD(人/m²)：居住人口密度，u,v(m/年)：x,y方向の人口移動速度成分
α(1/年)：出生率，β(1/年)：死亡率，γ(1/年)：対外部流出入率

ところで、人口移動速度成分u,vは、地下水流れのDarcy則類似概念から、人口移動速度成分が密度勾配に比例すると考えて、$u=-k_x\frac{\partial D}{\partial x}$, $v=-k_y\frac{\partial D}{\partial y}$（ここに$k_x,k_y$は、人口移動性係数と名付ける定数）とすることができるであろう。しかしこの式を用いると、式(1)が非線形微分方程式になり、解析が困難になるので、本論では次式を仮定することにする。　$u=-\frac{k_x}{D}\frac{\partial D}{\partial x}$，$v=-\frac{k_y}{D}\frac{\partial D}{\partial y}$　—(2)

上式の意味するところは、人口移動速度成分が密度勾配に比例し、密度に反比例するというものである。人口移動速度成分は、人口密度が同じレベルにあれば、密度勾配が大きい程速いと考えられ、また密度勾配が同じでも人口密度が大きい所では、速度は遅く、小さいところでは速いと考えられる。加えてk_x,k_yを各要素毎に変化させて調整する計算法をとるので、式(2)を仮定することも十分妥当であると考えられる。式(2)を式(1)に代入すれば

$$k_x\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}+(\alpha-\beta+\gamma)D-\frac{\partial D}{\partial t}=0 \quad —(3)$$

が得られる。式(3)を直接解くことは、境界の複雑性や、k_x,k_yの局部的変化からして困難である。そこでここでは次のような汎関数法を用いるものとする。すなわち、

$$\Pi=\int_S\left[\frac{1}{2}\left\{k_x\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2-(\alpha-\beta+\gamma)D^2\right\}+\frac{\partial D}{\partial t}D\right]dS$$（ここにS．解析領域）—(4)

一方式(3)の境界条件として、次の2条件が考えられる。

i)境界で人口密度が既知である。　$D=D_0$　—(5)

ii)境界を介して人口の移動量が押えられる。すなわち

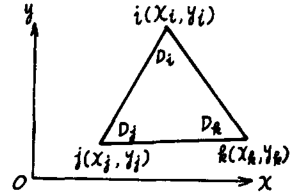
$$-uDl_x-vDl_y+q=0 \qquad \therefore\ k_x\frac{\partial D}{\partial x}l_x+k_y\frac{\partial D}{\partial y}l_y+q=0 \quad —(6)$$

ここに(l_x,l_y)：境界線に対する辺上の法線のx,y軸に関する方向余弦
q：境界単位長さ当りの既知流出入量

(ii)の条件のときには、(4)に境界項として $\int_c gD\,ds$（ここに c：境界）を付加する。

さて考察対象地域を三角形要素で区切り、要素内人口密度を、簡単のため、x, y による一次式と仮定する。

$$D=[1\ x\ y][a_0\ a_1\ a_2]^T = \mathbb{X}\mathbb{a} \quad —(7)$$



ここに a_0, a_1, a_2 は次の式により定まる定数である。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{pmatrix} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{D}^e \quad —(8)$$

（但し、(x_i, y_i) 等は基準座標系 xy に対する三角形頂点座標値
D_i 等は、三角形頂点 i 等における人口密度）

式(8)を式(7)に代入すれば　$D=[N_i\ N_j\ N_k]\mathbb{D}^e$ —(9)

ここに $N_{i,j,k} = \frac{1}{2\Delta}(a_{i,j,k} + b_{i,j,k}\cdot x + c_{i,j,k}\cdot y)$, $2\Delta = \det\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}$,

$a_i = x_jy_k - x_ky_j$　$b_i = y_j - y_k$　$c_i = x_k - x_j$
$a_j = x_ky_i - x_iy_k$, $b_j = y_k - y_i$, $c_j = x_i - x_k$
$a_k = x_iy_j - x_jy_i$　$b_k = y_i - y_j$　$c_k = x_j - x_i$

式(4)に関して、その変分方程式を求めると

$$\left\{\frac{\partial\pi}{\partial D_i}\right\}^e = \int_s \left[k_x\frac{\partial D}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial D_i}\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)\right\}^e + k_y\frac{\partial D}{\partial y}\left\{\frac{\partial D}{\partial D_i}\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)\right\}^e - (\alpha-\beta+\gamma)D\left\{\frac{\partial D}{\partial D_i}\right\}^e + \frac{\partial D}{\partial t}\left\{\frac{\partial D}{\partial D_i}\right\}\right]dS \quad —(10)$$

式(10)に式(9)を代入のうえ，式(10)の各項を計算すれば、次式をうる。但し、計算に際して演算を容易にするために、各要素ごとに、その重心を原点とする座標系を定める。(よって (x_i, y_i) 等は以後この重心座標系の座標値を表わすものである。)

$$\left\{\frac{\partial\pi}{\partial D_i}\right\}^e = \left(\frac{k_x}{4\Delta}\mathbb{B} - \frac{k_y}{4\Delta}\mathbb{C} - \frac{(\alpha-\beta+\gamma)\Delta}{12}\mathbb{E}\right)\mathbb{D}^e + \frac{\Delta}{12}\mathbb{E}\frac{\partial\mathbb{D}^e}{\partial t}$$

ここに $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_i^2 & & \text{SYM} \\ b_ib_j & b_j^2 & \\ b_ib_k & b_jb_k & b_k^2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} c_i^2 & & \text{SYM} \\ c_ic_j & c_j^2 & \\ c_ic_k & c_jc_k & c_k^2 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} a_i^2 + b_i^2(\Sigma x^2) + c_i^2(\Sigma y^2) + 2b_ic_i(\Sigma xy) & & \text{SYM} \\ a_ia_j + b_ib_j(\Sigma x^2) + c_ic_j(\Sigma y^2) + (b_ic_j + c_ib_j)(\Sigma xy) & a_j^2 + b_j^2(\Sigma x^2) + c_j^2(\Sigma y^2) + 2b_jc_j(\Sigma xy) & \\ a_ia_k + b_ib_k(\Sigma x^2) + c_ic_k(\Sigma y^2) + (b_ic_k + c_ib_k)(\Sigma xy) & a_ja_k + b_jb_k(\Sigma x^2) + c_jc_k(\Sigma y^2) + (b_jc_k + c_jb_k)(\Sigma xy) & a_k^2 + b_k^2(\Sigma x^2) + c_k^2(\Sigma y^2) + 2b_kc_k(\Sigma xy) \end{pmatrix}$$

ここで $\frac{k_x}{4\Delta}\mathbb{B} + \frac{k_y}{4\Delta}\mathbb{C} - \frac{(\alpha-\beta+\gamma)\Delta}{12}\mathbb{E} = \mathbb{g}$, $\frac{\Delta}{12}\mathbb{E} = \mathbb{h}$ とおけば、$\left\{\frac{\partial\pi}{\partial D}\right\}^e = \mathbb{g}\mathbb{D}^e + \mathbb{h}\frac{\partial\mathbb{D}^e}{\partial t}$ —(11)

よって解析領域全体で集積すると次式が得られる。

$$\mathbb{G}\mathbb{D} + \mathbb{H}\frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t} = \mathbb{O} \quad —(12)$$

ここに $\mathbb{G}$：領域全体について $\mathbb{g}$ を集積したもの
$\mathbb{H}$：領域全体について $\mathbb{h}$ を集積したもの
$\mathbb{D}$　領域全体の D_i のベクトル

境界項 $\int_c gD\,ds$ については、2節点間で D が直線変化し、g がその面にそって一定であるものと仮定することにより、次のように得られる。$\left\{\frac{\partial}{\partial D}\left(\int_c gD\,ds\right)\right\}^e = \begin{Bmatrix} \frac{g}{2}L \\ \frac{g}{2}L \end{Bmatrix}$（ここに L 境界長）

式(12)に対して Crank-Nicolson 法を適用するものとする。すなわち式(12)を $(t+\varepsilon\Delta t)$ において立てて計算すれば、

$$\left(\varepsilon\mathbb{G} + \frac{1}{\Delta t}\mathbb{H}\right)\mathbb{D}^{t+\Delta t} = -\left\{-(1-\varepsilon)\mathbb{G} + \frac{1}{\Delta t}\mathbb{H}\right\}\mathbb{D}^t \quad —(13)$$（ここに ε は $0 \leq \varepsilon \leq 1$ なる定数）

式(13)が本題解析の基本連立方程式となるものであり、当該時間段階の境界密度や出生率等および前時間段階の人口密度が与えられれば、本式を解くことにより、Δt 時間後の人口密度が求められることになる。

式(13)において k_x, k_y は具体的に与えることが難しいが、これを次のように算定する。すなわち式(11)を

$$\left\{\frac{\partial\pi}{\partial D_i}\right\}^e = \frac{1}{4\Delta}[\mathbb{B}\ \mathbb{C}]\left\{\varepsilon\mathbb{D}^{(t+\Delta t)e} + (1-\varepsilon)\mathbb{D}^{(t)e}\right\}\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} - \frac{(\alpha-\beta+\gamma)\Delta}{12}\mathbb{E}\left\{\varepsilon\mathbb{D}^{(t+\Delta t)e} + (1-\varepsilon)\mathbb{D}^{(t)e}\right\} + \frac{\Delta}{12}\mathbb{E}\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbb{D}^{(t+\Delta t)e} - \mathbb{D}^{(t)e}\right)$$

と変形し、全体で集積すると　$\mathbb{A}\mathbb{K} + \mathbb{Q} = \mathbb{O}$　ここに $\mathbb{A}$：第1項の $\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix}$ のマトリックスを全体で集積したもの
$\mathbb{Q}$：第2項と第3項の和を全体で集積したもの
$\mathbb{K}$：(k_x, k_y) で構成される列ベクトル

が得られる。上式は、k_x, k_y を未知数とする連立方程式であるが，未知数 k_x, k_y の数は一般に式の数より少ない。従って最小二乗法により k_x, k_y が求められることになる。

以上のようにして、各要素頂点の人口密度が求まると、式(7)を用いて三角形要素内全体を積分し、要素の将来人口の予測値が得られることになる。