

九州大学工学部 正 員 橋 東一郎
九州大学大学院 学生員 北川 三夫
九州大学大学院 学生員 橋本 典明
九州大学工学部 学生員 矢頭 基秀

I. まえがき

Sand-Waveの波形はかなり不規則であるため、統計的手法が導入されこれまでに 芦田・田中, No rdin, Yang・Sayresが、波長・波高分布に関する実験式を提案している。最近 中川・辻本⁵⁾は河床波の波長について乗交反問題の成果を適用し、波長の変動係数を推定した後に、shape parameter r が4.5のgamma分布に従うとしたが、河床波の縦断形状 $y(x)$ の相関係数 $\rho_y(3)$ がわからなり限り厳密な解とは言えない。この点に鑑みて筆者らは、中川⁵⁾と同様に $y(x)$ を乗交反問題としてとらえながら $\rho_y(3)$ を用いることなく理論的に妥当と思える波長分布の直接的解法を試み、実験結果と比較した。

II. 河床波の波長分布に関する統計的性質

今水理条件は、確定常かつ厳密に一律である(水理条件の分布がすべての高次モーメントについて時刻及び場所依存しない)とすれば、平均河床高からの河床縦断形状 $y(x)$ の単位長さあたりの乗交反確率密度 r_0 は、一定であると考えることができよう。

この仮定のもとに、区間 $[0, x]$ に含まれる乗交反個数 n である確率 $P(n; x)$ とすれば、 $P(n; x)$ に関する方程式として 次式を得る。(図・1)

$$P(n; x + \Delta x) = (1 - r_0 \Delta x) P(n; x) + P(n-1; x) r_0 \Delta x + O(\Delta x) \quad \text{--- ①}$$

($O(\Delta x)$ はLandauのsmall o で $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} = 0$)

①式を若干変形してやれば次の微分方程式となる。

$$\frac{d}{dx} \{P(n; x)\} = -r_0 \{P(n; x) - P(n-1; x)\} \quad \text{--- ②}$$

さらに $(n+1)$ 個の乗交反間隔の総和の確率密度関数 P. D. F. を $f_n(x)$ と定まれば、 $f_n(x)$ 及びそのラプラス変換 $\phi_n(s)$ は、③④式であらわされる。

$$f_n(x) = f_0^{(n+1)*}(x) \quad \text{--- ③} \quad \phi_n(s) = \phi\{f_n(x)\} = \{\phi_0(s)\}^{n+1} \quad \text{--- ④}$$

ここで $f_0^{(n+1)*}(x)$ は $f_0(x)$ の $(n+1)$ 重畳み込みを示す。(図・2)は $f_0(x)$ の最初1番目の乗交反間隔 X_1 、第 n のそれを X_n とし、 $\sum_{i=1}^n X_i = Y_n$ とすれば、

$$P(n; x) = \text{Prob}[Y_{n-1} \leq x < Y_n] \quad \text{--- ⑤}$$

これを2変数確率問題として取り扱ひ、 $A = \{Y_{n-1} \mid Y_{n-1} \leq x\}$, $B = \{Y_n \mid Y_n > x\}$ なる2集合を考えれば、

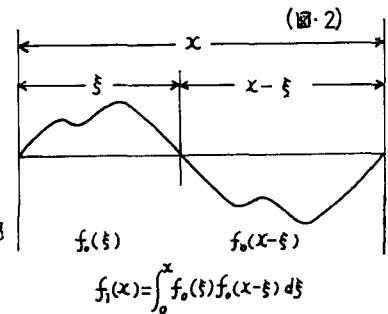
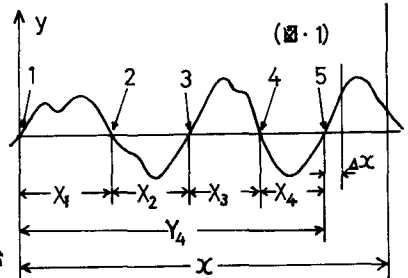
$$P(n; x) = \text{Prob}\{A \cap B\} = \text{Prob}\{A\} + \text{Prob}\{B\} - \text{Prob}\{\Omega\} \quad \text{--- ⑥}$$

ただし Ω ; 考える全集合, $\text{Prob}\{\Omega\} = 1$

$\text{Prob}\{A\} = \int_0^x f_{n-2}(\xi) d\xi$, $\text{Prob}\{B\} = \int_x^\infty f_{n-1}(\xi) d\xi = 1 - \int_0^x f_{n-1}(\xi) d\xi$
従って $P(n; x)$ と $f_n(x)$ の関係式は、⑦式となる。

$$P(n; x) = \int_0^x f_{n-2}(\xi) d\xi - \int_x^\infty f_{n-1}(\xi) d\xi \quad \text{--- ⑦}$$

⑦, ④式を使て②式を書き直し、両辺のラプラス変換をとれば、



$$f_{n-2}(x) - f_{n-1}(x) = r_0 \left\{ f_{n-1}(3) - 2f_{n-2}(3) + f_{n-3}(3) \right\} d_3 \quad (8)$$

$$\phi_0(s) \{ r_0^2 \phi_0(s) - 1 \} (r_0 + s) \phi_0(s) - r_0 = 0 \quad (9)$$

⑨式の意味のある解をこれば、 $\phi_0(s) = r_0 / (r_0 + s)$ を得る。
ところで我長分布のP.D.F.としては、定義より $f_1(x)$ {2つの車交差間隔の和}のP.D.F.がこれに相当する。

$$f_1(L) = \int_0^L \{ \phi_0(s)^2 \} = r_0 \cdot L \cdot \exp(-r_0 L) \quad (10)$$

⑩式より求められる L は $2/r_0$ 、 G_L は $1/\sqrt{2}$ となり、 $2/r_0$ が平均我長に相当するという従来からの指摘に一致する。

⑩式を L で無次元化すると⑪式つまり $r=2$ の Γ 分布となる。

$$f_1(3) = 4/3 \cdot \exp(-2/3) \quad (11) \quad F(3) = \int_0^3 f_1(u) du$$

III. 実験結果及び考察

実験水路は、長さ18m、移動床区間10m、巾60cmで解析には移動床区間の中央部8.5mを用いた。下流端には集砂箱を置きサイフォンにより流量が求められた。一方上流端には給砂装置をとりつけ一定量の給砂が行なわれる。実験条件は、 $I_e = 2.76 \times 10^{-3}$, $q = 222 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $\bar{r} = 5.96 \text{ cm}$, $G_L = U_{*0}^2 / s g d = 0.115$, $\phi = 9.73$, $Q_b = 207 \text{ cm}^3/\text{min}$, $R = 0.487$ である。なお使用砂は、 $d_{50} = 0.08 \text{ cm}$, $s/\rho = 2.66$ のものを用いた。河床形状及び水面形は、自走式砂面計装置、サーボ式水位計[自走速度23cm/sec]を用い2分おきに自車を走らせ、データレコーダに記録した。その後両者とも0.18cm刻みでデジタル化し、4746個のデータを得て大型計算機により平均化を行なった。測定時間は35時間各時刻における我長を車交差法により求めた。なお一実験における我長のデータ数れが少ないうち前後±2分のデータをつなぎあわせた。

平均我長、平均我高、平均我形勾配(H/L の平均値)の時系列変化を(図・3)に、我長分布を(図・4、5)に示した。(図・4)には、 $r=2$ の Γ 分布が、(図・5)には、芦田らによるレーリー分布、中川らによる $r=4$ の Γ 分布が同時に示してある。

(図・6)(図・7)には、我高分布、我形勾配(H/L)の分布を参考のため示した。今後筆者らは実験を重ね、 G_L の分布を考慮した我長分布、及び我高分布、我形勾配の分布へと考察をひろげていきたい。なお本論文作成にあたり貴重な助言をいただいた橋本即手、及び実験・データ処理に協力いただいた藤田・柴田両技官はじめ水理研の方々へ感謝します。

◎参考文献

- ① 芦田和男・田中祐一朗；京大防災研年報10号B PP.121~132 1967
- ② 中川博次・辻本吾郎；土木学会論文報告集 NO.291 PP.53~62 1979
- ③ “ ” “ ” “ ” NO.291 PP.73~83 1979

