302−8

拡散方程式の2次移流項を導入した数値解析

九州産業大学　正員　○加納正道

九州産業大学　正員　　赤坂順三

1.まえがき　著者らは湾域の水質汚濁を拡散方程式の数値解析によって取り扱う場合には、対象海域を格子に分割して拡散方程式を差分化して電子計算機により演算をおこなう方法をとってきた。拡散方程式を1次元で示せば式(1)となり、この式では高次微分項が無視できる十分小さいdxで表現する。一方、拡散方程式を湾域の広い領域で差分化するときの格子間隔Δxは、電子計算機の計算容量がΔxの2乗に比例することから、数百mから数Kmの大きさになる。大きなΔxにおいては汚濁物質の濃度勾配が大きく勾配を直線とみなせない箇所が生じ、高次微分項がゼロとならず無視できなくなる。そこで、著者らは拡散物質の連続式をdx × dyの微小矩形に立て高次項を検討した結果大きなΔxで差分化する基礎式として式(2)を提案し、右辺第2項を2次移流項と呼んだ[1]。

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial (UC)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right)\cdots(1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-U\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{U}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}dx+D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\quad\cdots(2)$$

（但し、UとDは一定）

本報は2次移流項を導入した式(2)の解析手法と結果をのべたものである。

2.差分化および計算方法　2次移流項は格子間隔Δx内の濃度差による勾配を表現する目的をもつから、図1に示すようにΔx内に$i-\frac{1}{2}$や$i+\frac{1}{2}$のような新しい格子点をとって差分化する必要がある。また、移流項の2次項の意味をもつので移流項と同様に流速の正負によって差分の方向を違えるone−sided 差分を適用する。そして、新格子点濃度は未知であるから陰形式表示をする。つぎに、移流項と拡散項の差分化には文献1）などで用いた方法を適用すれば式(2)の差分式はつぎのようになる。C_i^{k+1}はk+1時間のi地点の濃度を意味し、以後は簡単のためC_i^{k+1}をC'_i，C_i^kをC_iと表示する。

$$\left.\begin{array}{ll}
U_i\geqq 0\text{ のとき} & \dfrac{C'_i-C_i}{\Delta t}=\dfrac{-U_i}{\Delta x}(C'_i-C'_{i-1})-\dfrac{U_i}{\Delta x}(C'_{i-1}-2C'_{i-\frac{1}{2}}+C'_i)+\dfrac{D_i}{(\Delta x)^2}(C'_{i+1}-2C'_i+C'_{i-1}) \\
U_i<0\text{ のとき} & \dfrac{C'_i-C_i}{\Delta t}=\dfrac{-U_i}{\Delta x}(C'_{i+1}-C'_i)-\dfrac{U_i}{\Delta x}(C'_{i+1}-2C'_{i+\frac{1}{2}}+C'_i)+\dfrac{D_i}{(\Delta x)^2}(C'_{i+1}-2C'_i+C'_{i-1})
\end{array}\right\}\cdots\cdots(3)$$

更に、整理すればUi≧0のときは、

$$C'_{i-1}\left\{\frac{-D_i\Delta t}{(\Delta x)^2}\right\}+C'_{i-\frac{1}{2}}\left\{\frac{-2U_i\,\Delta t}{\Delta x}\right\}+C'_i\left\{\frac{2U_i\,\Delta t}{\Delta x}+\frac{2D_i\,\Delta t}{(\Delta x)^2}+1.0\right\}+C'_{i+1}\left\{\frac{-D_i\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\right\}=C_i\qquad\cdots\cdots(4)$$

となる。Ui<0のときも同様な式がえられ、これらをi＝3からn−2まで展開し、両端4個を境界条件で補い（$C'_1=C_1$，$C'_2=C_2$，$C'_{n-1}=C_{n-1}$，$C'_n=C_n$とする）、マトリックス表示すれば図2、図3のようになる。2次移流項を導入した解析は5重対角行列の連立1次方程式をとくことになる。但し、このマトリックスには海陸の複雑な境界条件および計算領域の境界条件は含まれていないので実際の計算マトリックスはさらに複雑となる。

3.計算結果および考察　図4と図5に2次移流項を導入した延岡湾域の拡散解析結果を示す。これらを著者らの数値移流係数による離散誤差の補正[2]をおこなった計算例である図6、図7と比較すれば、補正をおこなった結果（補正ある方が実験結果に近い[2]）とよく似た等濃度線となっている。

4.むすび　2次移流項を導入した拡散解析は、数値移流係数によって離散誤差を補正した場合の解析結果とほぼ似た結果となり、数値移流係数による補正とほぼ同じ程度の影響を計算結果に与える。

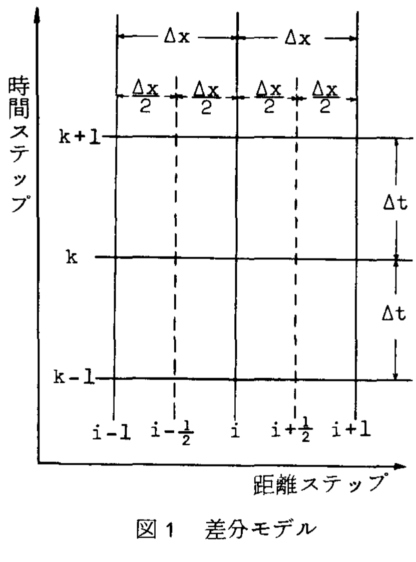

図1　差分モデル

$$
\begin{bmatrix}
C & 0 & D & 0 & \cdots & & 0 \\
B & C & 0 & D & 0 & \cdots & 0 \\
A & B & C & 0 & D & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 \cdots 0 & A & B & C & 0 & & D \\
0 \cdots\cdots 0 & & A & B & C & & 0 \\
0 \cdots\cdots\cdots & & 0 & A & B & & C
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C'_3 \\ C'_4 \\ \vdots \\ \\ C'_{n-3} \\ C'_{n-2}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_3 + AC_1 + BC_2 \\
C_4 + AC_2 \\
\vdots \\
\\
C_{n-3} + DC_{n-2} \\
C_{n-2} + 0\,C_{n-1} + DC_n
\end{bmatrix}
$$

但し，

$\left\{-\dfrac{Di\,\Delta t}{(\Delta X)^2}\right\}$; A

$\left\{-\dfrac{2U\Delta t}{\Delta X}\right\}$; B

$\left\{\dfrac{2U\Delta t}{\Delta X} + \dfrac{2Di\Delta t}{(\Delta X)^2} + 1.0\right\}$; C

$\left\{-\dfrac{Di\Delta t}{(\Delta X)^2}\right\}$; D

図２　差分式マトリックス　（Ui ≧ 0 ）

$$
\begin{bmatrix}
G & H & I & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & G & H & I & 0 & \cdots & 0 \\
F & 0 & G & H & I & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 \cdots 0 & F & 0 & G & H & & I \\
0 \cdots\cdots 0 & & F & 0 & G & & H \\
0 \cdots\cdots\cdots & & 0 & F & 0 & & G
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C'_3 \\ C'_4 \\ \vdots \\ \\ C'_{n-3} \\ C'_{n-2}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_3 + FC_1 + 0\,C_2 \\
C_4 + FC_2 \\
\vdots \\
\\
C_{n-3} + HC_{n-2} \\
C_{n-2} + HC_{n-1} + ICn
\end{bmatrix}
$$

但し，

$\left\{-\dfrac{Di\Delta t}{(\Delta X)^2}\right\}$; F

$\left\{\dfrac{2Di\Delta t}{(\Delta X)^2} + 1.0\right\}$; G

$\left\{-\dfrac{2U\Delta t}{\Delta X}\right\}$; H

$\left\{\dfrac{2U\Delta t}{\Delta X} - \dfrac{Di\Delta t}{(\Delta X)^2}\right\}$; I

図３　差分式マトリックス　（Ui ＜ 0 ）

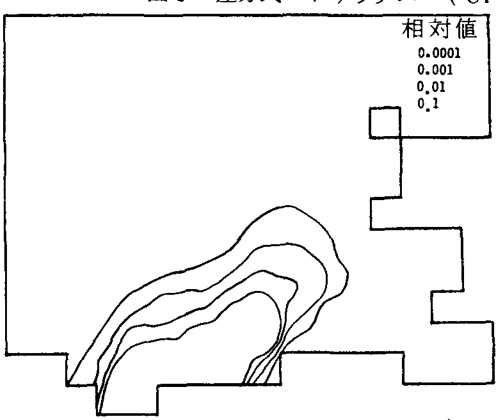

図４　２次移流項導入計算　（３分）

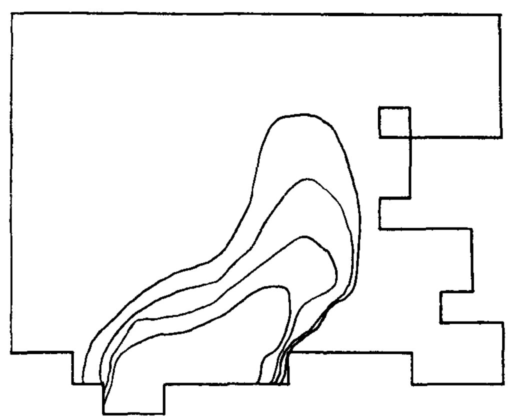

図５　２次移流項導入計算　（５分）

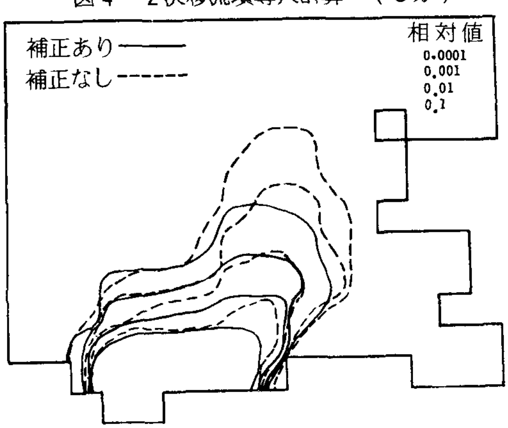

図６　数値移流係数導入計算　（３分）

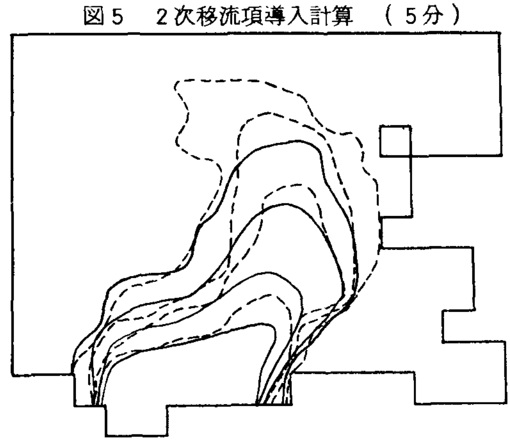

図７　数値移流係数導入計算　（５分）

参考　１）加納・崎山；拡散数値解析についての二・三の考察，土木学会第31回年講第2部　P367　1976

文献　２）加納・崎山・細川；拡散解析法の相違による算定結果の評価について，土木学会第32回年講第2部 P458　1977