二次元開水路における移流分散過程の解析

Ｓ５５．α

大分工業高等専門学校　正会員　島田　晋

§1. まえがき　せん断乱流場における拡散現象は，河川での水質汚濁問題と関連して興味深い研究対象である。　この報告では移流分散過程（流れ方向の濃度分布の経時変化 FIG.2参照）を確率論的解析方法（特性関数と確率母関数）により，分散が一様に起こる場合とポアソン過程で生起する場合について解析したものである。

§2. 解析の準備　FIG.1 に示すような二次元開水路乱流を考え，y軸を水表面から水路底へ向ってとれば，流速分布は速度欠損 v が対数分布 (1)で示され，断面平均流速U_mは(2)，断面平均速度欠損V_mは(3) となる。ここにU_0は断面内最大流速である。 V の累積分布関数F(V)は(4)，確率密度関数f(V)は(5)，そして特性関数は確率密度関数のプラスiフーリエ変換として(6)で表わされ，平均値V_m:(7)，分散V_s:(8)，3次キュムラントV_3:(9)，4次キュムラントV_4:(10) である。

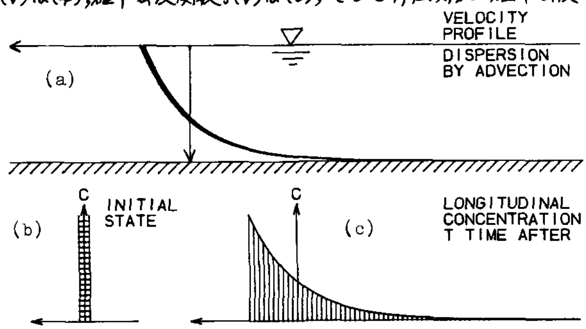

FIG.1 INITIAL DISPERSION OF CLOUD OF CONTAMINANT IN TURBULENT OPEN CHANNEL FLOW. SHOWING THE ASSYMMETRY CAUSED BY ADVECTION

断面内の流体粒子がある相関時間Tだけは，確率密度関数がf(V)で表わされる速度で移動するものと考えると，初期濃度分布がFIG.1(b)に示すようなデルタ関数のとき，移流作用によりFIG.1(a)のような分布形状となる。これを流れ方向の濃度分布C(Y,T)として求めると，FIG.1(c)に示すような断面内流速の確率密度と同形の指数分布 (11)となる。ここでYは分散雲先端からの距離，Lは1ステップの拡散幅の大きさを示す。C(Y,T)のプラスiフーリエ変換H(b)は，V の特性関数Q(w)においてwをbTに置き換えたものに等しくなる(13)。　従って断面内最大流速で移動する座標系において，nステップ後の分散雲先端からの流体粒子の距離Z_nは(14)で表わされ，各ステップは独立な非負の増分Yをもち，その特性関数がすべて等しい場合(15)の解析を行なう。

§3. 分散が一様に起こる場合　相関時間Tが一定のときであり，C(Z,nT)のプラスiフーリエ変換M(b,n):(16) は1ステップの特性関数H(b)のn乗として表わされる。逆変換の公式(17)から流れ方向の濃度分布はガンマ分布(18)となる。濃度分布に関する平均値・分散・3次キ

H.B.Fischer(1968):Pr.A.S.C.E.SA5

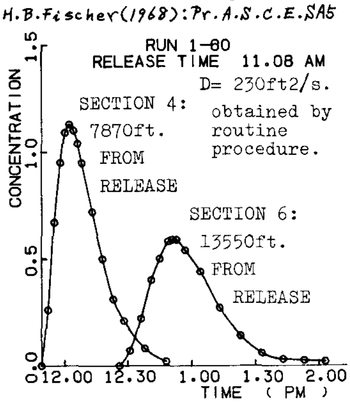

FIG.2 OBSERVED CURVES OF CONCENTRATION VERSUS TIME (DATA IN NATURAL STREAM)

velocity defect :

$$v=U_0-u=-U_*/k\cdot\ln(1-y/h)\quad(0\le y\le h) \tag{1}$$

mean velocity : $U_m=\langle u\rangle$ ------------- (2)

mean velocity defect : $V_m=U_0-U_m$ ---- (3)

cumulating distribution function of v :

$$F(v)=\Pr(V\le v)=y/h=1-\exp(-kv/U_*) \tag{4}$$

probavility dencity function of v :

$$f(v)=\frac{dF}{dv}=\frac{1}{h}\cdot\frac{dy}{dv}=\frac{k}{U_*}\exp\left(-\frac{kv}{U_*}\right)\cdot U(v) \tag{5}$$

unit step function : $U(v)$

characteristic function of v :

$$Q(w)=\langle\exp(iwv)\rangle=1/(1-iwU_*/k) \tag{6}$$

mean value of v : $V_m=\langle v\rangle=U_*/k$ -------- (7)

variance of v :

$$V_s=\langle(v-V_m)^2\rangle=(U_*/k)^2 \tag{8}$$

third cumulant of v :

$$V_3=\langle(v-V_m)^3\rangle=2\cdot(U_*/k)^3 \tag{9}$$

fourth cumulant of v :

$$V_4=\langle(v-V_m)^4\rangle-3V_s^2=6\cdot(U_*/k)^4 \tag{10}$$

concentration at T time after release :

$$C(Y,T)dY=f(v)dv=f(Y/T)dY/T$$

$$\therefore C(Y,T)=f(Y/T)/T=\exp(-Y/L)/L\cdot U(Y) \tag{11}$$

$$\because L=U_*T/k=V_m\cdot T=\sqrt{V_s}\cdot T \tag{12}$$

plus-i Fourier transform of C(Y,T)

(i.e. characteristic function of Y) :

$$H(b)=\langle\exp(ibY)\rangle=Q(bT)=1/(1-ibL) \tag{13}$$

$$Z_n=Y_1+Y_2+\dots\dots+Y_n \tag{14}$$

ュムラント・ゆがみ・4次キュムラント及び超過は(19)〜(24)で与えられる。J.W.Elder[+)]によって得られている分散係数の値(25)を用いて相関時間Tと1ステップの拡散幅Lを求めれば(26)・(27)になる。 +) Jr.Fluid Mech.Vol.5.

§4. 分散がポアソン過程で生起する場合

時間tまでのステップ数nの確率分布p(j)は(28)であり，確率母関数G(s)は(29)で示される。Znの特性関数Φ(b)は(29)でsに(13)を代入して(30)のように得られ，濃度分布C(Z,t)は第1種の変形されたベッセル関数を用いて(31)で表わされる。濃度分布に関する平均値・分散・3次キュムラント・ゆがみ・4次キュムラント及び超過は(32)〜(37)である。

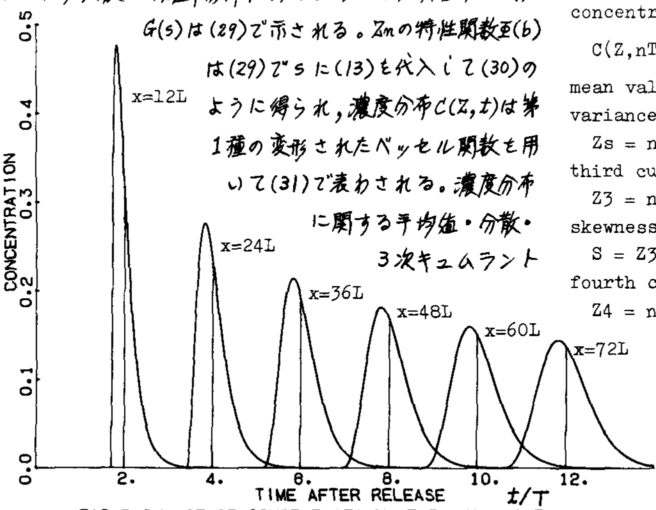

FIG.3 CHANGE OF CONCENTRATION AT FIXED POINT (TWO DIMENSIONAL TURBULENT OPEN CHANNEL FLOW)

§5. むすび

二次元開水路乱流では速度分布が対数分布(1)のとき，速度欠損の確率密度関数は指数分布(5)となり，1ステップ後の流れ方向の濃度分布も指数分布(11)で表わされる。 分散が一様に起こる場合，濃度分布はガンマ分布(18)で示され，分散がポアソン過程で生起する場合，濃度分布は第1種の変形されたベッセル関数を用いた(31)で表現される。 濃度分布が正規分布からどの程度ずれているかを示す，ゆがみは分散時間の平方根に逆比例し(22)・(35)，超過は分散時間に逆比例する(24)・(37)。なおこの研究内容の一部は第24回水理講演会（1980年2月）において発表予定である。

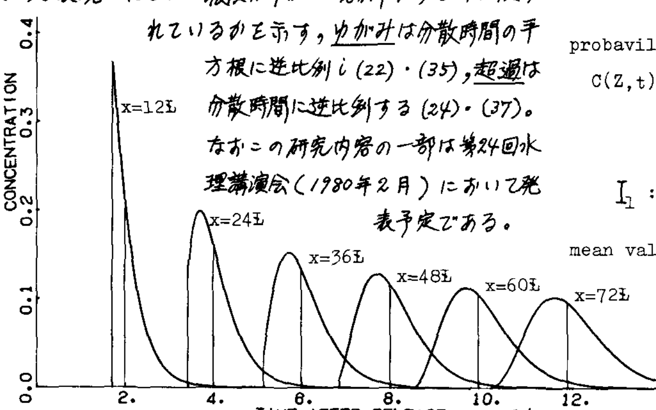

FIG.4 CHANGE OF CONCENTRATION AT FIXED POINT (POISSON PROCESS. TURBULENT OPEN CHANNEL FLOW)

$$\langle\exp(ibY_1)\rangle = \dots = \langle\exp(ibY_n)\rangle = H(b) = \langle\exp(ibY)\rangle \quad \text{----------} (15)$$

plus-i Fourier transform of C(Z,nT) (i.e. characteristic function of Zn) :

$$M(b,n)=\langle\exp(ibZ_n)\rangle=H(b)^n=1/(1-ibL)^n \quad (16)$$

from inversion formula :

$$C(Z,nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M(b,n)\exp(-ibZ)\,db \quad \text{--} (17)$$

concentration at nT=t time after release :

$$C(Z,nT)= \frac{(Z/L)^n}{\Gamma(n)\cdot Z}\exp\left(-\frac{Z}{L}\right)\cdot U(Z) \quad \text{------} (18)$$

mean value of Z : $Z_m=n\cdot V_mT=U^*t/k$ ---- (19)

variance of Z :

$$Z_s = n\cdot V_s\cdot(T^2) = n\cdot(U^*T/k)^2 \quad \text{-----} (20)$$

third cumulant of Z :

$$Z_3 = n\cdot V_3\cdot(T^3) = 2n\cdot(U^*T/k)^3 \quad \text{----} (21)$$

skewness of Z :

$$S = Z_3/Z_s^{3/2} = 2\sqrt{n} = 2\sqrt{T/t} \quad \text{-----} (22)$$

fourth cumulant of Z :

$$Z_4 = n\cdot V_4\cdot(T^4) = 6n\cdot(U^*T/k)^4 \quad \text{----} (23)$$

excess of Z :

$$E=Z_4/Z_s^2= 6/n = 6\cdot T/t \quad \text{-----} (24)$$

dispersion coefficient :

$$D= \frac{Z_s}{2t} = \frac{V_sT}{2} \fallingdotseq \frac{0.404}{k^3}hU^* \quad \text{----} (25)$$

correlation time :

$$T=2D/V_s \fallingdotseq (0.808/k)\cdot h/U^* \quad \text{-----} (26)$$

$$L \fallingdotseq (0.808/k^2)\cdot h \fallingdotseq 5\cdot h \quad \text{----} (27)$$

if n=N(t) is a random variable of Poisson Process ($\langle n\rangle=\lambda t$),

probavility dencity function of n :

$$p(j) = \Pr(n=j) = (\lambda t)^j\cdot\exp(-\lambda t)/j! \quad (28)$$

$$(\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ )$$

probavility generating function of n :

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p(j)\cdot s^j = \exp(\lambda ts-\lambda t) \quad \text{---} (29)$$

characteristic function of Zn :

$$\Phi(b) = G\{H(b)\} = \exp(\lambda t/(1-ib\bar{L})-\lambda t)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!(1-ib\bar{L})^j}\exp(-\lambda t) \quad \text{-----} (30)$$

probavility dencity function of Zn :

$$C(Z,t) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda tZ/\bar{L})^j}{j!\cdot\Gamma(j)}\,\frac{\exp(-\lambda t-Z/\bar{L})}{Z}$$

$$= I_1\left(2\sqrt{\frac{\lambda tZ}{\bar{L}}}\right)\cdot\sqrt{\frac{\lambda t}{\bar{L}Z}}\cdot\exp\left(-\lambda t-\frac{Z}{\bar{L}}\right) \quad (31)$$

I_1 : modified Bessel function of the first kind of order one

mean value of Z : $Z_m = \lambda t\bar{L}$ ---------- (32)

variance of Z : $Z_s= 2\lambda t\cdot(\bar{L}^2)$ (33)

third cumulant : $Z_3=6\lambda t(\bar{L}^3)$ (34)

skewness : $S= 3\sqrt{2}/2/\sqrt{\lambda t}$ ----- (35)

fourth cumulant of Z :

$$Z_4 = 24\lambda t\cdot(\bar{L}^4) \quad \text{--------} (36)$$

excess of Z :

$$E = 6/\lambda t \quad \text{-------------} (37)$$