

九州大学工学部 正員 栗谷陽一

九州工業大学 正員 ○藤崎一裕

1. まえがき

筆者らは、さきに沈降性粒子の移流分散現象について検討し、数値計算により分散係数を求めた。¹⁾

本報では、これらの現象に対する取扱いが、解析的にもある程度まで可能であることを示す。また、現象の基礎方程式である粒子保存の式を直接差分化してえられる解を用いて、解析結果の妥当性を調べる。

2. 基礎式

開水路等流状態を考へ、粒子濃度を C 、粒子沈降速度を w とすると、保存則及び境界条件は次式となる (図1)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (uC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ D \frac{\partial C}{\partial y} + wC \right\} \quad (1)$$

$$D \cdot \partial C / \partial y + wC = 0, (y=h) \quad (21) \quad \partial C / \partial y = 0, (y=0) \quad (22)$$

D は拡散係数である。流速 u に対数分布を仮定すると

$$\frac{u}{u_*} = A + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_*} \quad (3) \quad \kappa = 0.4$$

$$D = \kappa u_* y (1 - y/h), \quad u_* \text{ 摩擦速度} \quad (4)$$

濃度 C に関しては、 x 方向の変化が小さい場合を想定しているから、移動座標 ξ で展開して1次の項までとり、補正項を付加して次式で表わす。

$$C(y, t) = \bar{C}(y, t) (1 + \alpha Z_1) + \hat{C}(y, t) \quad (5)$$

α は一定とし、 $\bar{C}$ は下の(6)式の解とする

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \bar{y} (1 - \bar{y}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{y}} + Z \bar{C} \right\} \quad (6)$$

$$\bar{t} = t \kappa u_* / h, \quad \bar{y} = y/h, \quad Z = w / \kappa u_* \quad (7)$$

(6) 式に、変数分離形の解を想定して

$$\bar{C}(\bar{y}, \bar{t}) = \bar{C}_0(y) \cdot T(\bar{t}) \quad (8)$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\bar{C}_0} \left\{ \bar{y} (1 - \bar{y}) \bar{C}_0'' + (1 - 2\bar{y} + Z) \bar{C}_0' \right\} = -\lambda \quad (9) \quad (\lambda \text{ 分離定数})$$

がえられる。ここで(10)式を用いると(9)式は(11)式

$$-\lambda = \alpha^2 - \frac{1}{4}, \quad \alpha = a + \frac{1}{2}, \quad \beta = -a + \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1 + Z \quad (10)$$

$$\bar{y} (1 - \bar{y}) \bar{C}_0'' + \gamma - (\alpha + \beta + 1) \bar{y} \bar{C}_0' - \alpha \beta \bar{C}_0 = 0 \quad (11)$$

となる。(11)式は超幾何微分方程式の標準形であるから

(6) 式の一般解は、超幾何関数 F を用いて近似的に

$$\bar{C} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F[-(n+Z-1), n+Z, 1+Z, \bar{y}] \cdot \exp[-(n+Z)(n-1+Z) \bar{t}] \quad (12)$$

と表わされる。(a_n は初期条件の展開係数)

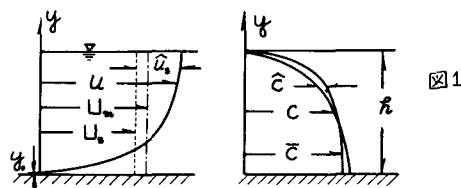


図1

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \bar{y}) = \sum_n \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{\bar{y}^n}{n!} \\ = (1 - \bar{y})^{\gamma - \alpha - \beta} \sum_n \frac{(\gamma - \alpha)_n (\gamma - \beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{\bar{y}^n}{n!} \quad (13)$$

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1)(\beta+2) \cdots (\beta+n-1) = \Gamma(\beta+n) / \Gamma(\beta)$$

Γ はガンマ関数である。

時間が十分に経過した場合を考え、(12)式の方1項のみをとると

$$\bar{C} = a_0 \bar{C}_0 e^{-\lambda_0 \bar{t}} = a_0 (1+Z)(1-\bar{y})^2 e^{-Z(Z+1)\bar{t}} \quad (14)$$

$$\bar{C}_0 = (1+Z)(1-\bar{y})^2, \quad \lambda_0 = Z(Z+1) \quad (15)$$

となる ($\int_0^1 \bar{C}_0 d\bar{y} = 1$ とし)。また、(16)式を用いると

$$C^0 = \int_0^1 \bar{C} d\bar{y}, \quad m_0 = \int_0^1 \bar{C}^0 d\bar{y} \quad (\bar{y} = y/h) \quad (16)$$

$$\lim_{\bar{t} \rightarrow \infty} \frac{C^0}{m_0} = (1+Z)(1-\bar{y})^2 \quad (17)$$

の関係も成立する。

以上のことから、 $\bar{C}_0$ は水路底部での粒子の再浮上と認めない場合における濃度分布の普通形 (極限形) ともみえる。図2に $\bar{C}_0$ と $Z, \bar{y}$ との関係を示す。

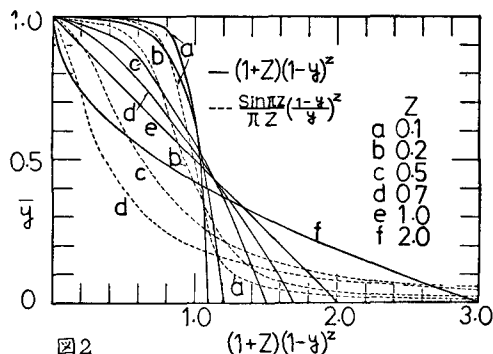


図2

(15) 式を用いると、粒子の平均移動速

度 $\bar{U}_s$ は次式で表わされる (図3)

$$\begin{aligned}\bar{U}_s &= \int_{\bar{q}} \frac{u}{K u_*} \bar{c} \cdot d\bar{q} / \int_{\bar{q}} \bar{c} \cdot d\bar{q} \\ &= \int_{\bar{q}} \frac{1}{K u_*} (1+Z)(1-\bar{q})^Z u(\bar{q}) d\bar{q} \\ &= \frac{1}{K^2} \left\{ \ln \frac{K}{\bar{q}} - \gamma_e - \psi(Z+2) \right\} \quad (18)\end{aligned}$$

$$\psi(Z) = \Gamma'(Z)/\Gamma(Z), \quad \gamma_e = 0.57721$$

(5) 式の $\hat{c}$ を

$$\hat{c} = \hat{c}_0 e^{-\lambda_s t} \quad (19)$$

において、以上の結果を (1) 式に代入す

ると、前報¹⁾と同様にして $\hat{c}_0$ がえられる。

このとき分散係数 D_L は (20) 式で与えられる

$$\frac{D_L}{K u_*} = -K \int_{\bar{q}} \hat{u}_s \hat{c}_0 d\bar{q}, \quad \hat{u}_s = (u - u_s)/K u_* \quad (20)$$

3. 計算結果と解析

図4中に $Re = u_* R/\nu$ をパラメータにした Z と $D_L/K u_*$ の関係を示す。 Z の増大とともに分散係数が大きくなる様子が出ている。なお、図2、図3中の破線は、底部における粒子の沈積を認めない場合の解²⁾である。

以上の解析結果の妥当性を調べるため、(1) 式を直接差分化して、濃度分布の流下方向、水深方向の変化を調べた。差分スキームは通常の陽差分形式³⁾を用いたが、 Δx は沈降の進行とともに若干増大させた。

図5は、水深方向に平均した濃度の時間的変化を示し、下流に進むにしたがって、分布形が正規分布に近づいている。図6は、 $\bar{x} = \bar{U}_s \bar{t}$ 部における水深方向の濃度変化を示す。その増大とともに分布形が $\bar{c}$ に近づいている。また、図6中のa, bはそれぞれ $\alpha, -\alpha$ の近辺 (時刻 $\bar{t} = 0$) の濃度分布形である。

図7には、図5のような計算結果からえられる濃度分布の分散 (variance) と $\bar{t}$ との関係、及び図4の値を用いた (21) 式を示した。

$$\frac{1}{K} \frac{D_L}{K u_*} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\sigma^2}{d\bar{t}} \quad (21)$$

参考文献

- 1) 栗谷, 藤崎: 土木学会年次講演会概要集 (III), 1979, pp 199-200
- 2) Sumer, B M J Fluid Mech, vol. 65, 1974, pp 11-28
- 3) Sayre, W W PASCE, vol 95, No HY3, 1969, pp 1009-1038

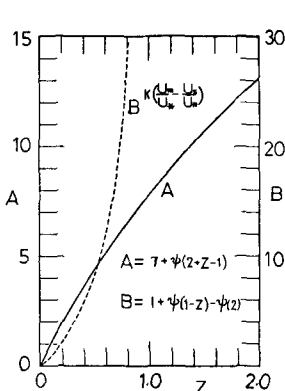


図3 ↑

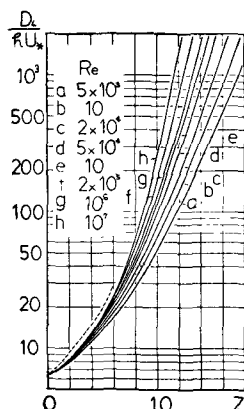


図4 ↑

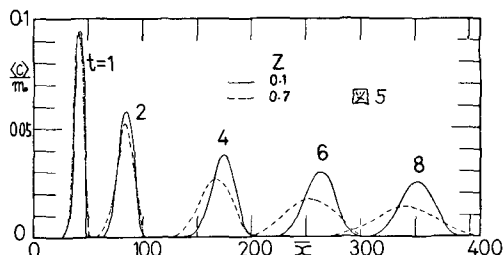


図5

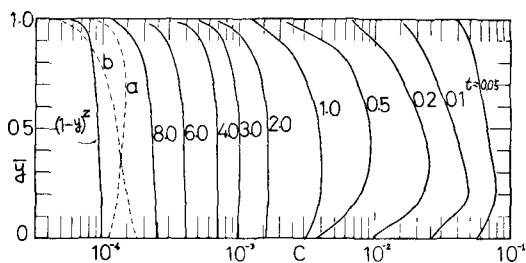


図6

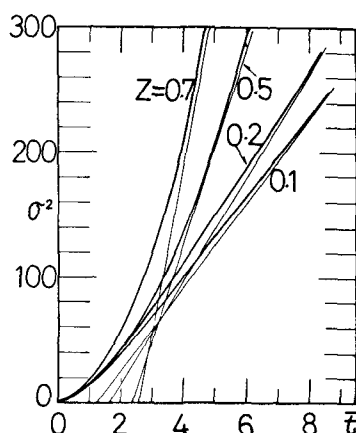


図7