

長崎大学工学部

正 員 ○岡林 隆敏

長崎大学工学部

学生員 河内 忠義

1. はじめに 不規則応答解析において、構造物に作用する不規則外力を、ガウス性白色雑音を入力とする微分方程式で記述されるフィルター系で表現できるならば、応答の共分散は共分散方程式に支配される。しかし、共分散方程式は、未知数がマトリックスの形式で表されているために、複雑に連成した系の応答解析においては、大次元の方程式を数値解析する必要に迫られる。マトリックス形式の変数を通常のベクトルに展開し、通常の処理は可能であるが、計算機の記憶容量が多くかつ計算時間が長くなる場合がある。本研究では、共分散方程式をマトリックス形式で処理する数値解析に考察を加えると共に、非定常応答解析の1つの手法を示した。数値計算の対象として、不規則路面凹凸上を走行する、単一車両によるランガー桁橋の不規則振動を考えている。ランガー橋のモードは4次まで考慮することにより、共分散方程式の未知数は64個である。

2. 不規則応答理論 任意のパワースペクトルを有する非定常不規則外力が構造物に作用する場合、非定常不規則外力を形状関数と定常確率過程の積の形でモデル化し、かつ定常確率過程を白色雑音を入力とするフィルターの出力でモデル化することが可能であれば、構造物・外力系は、次のような確率微分方程式で表現できる。 $dX(t) = A(t)X(t)dt + B(t)dW(t) \dots (1)$ ここに、 $W(t)$ はウィナー過程ベクトルで、次のような確率特性を有するガウス確率過程である。

$$E[dW(t)] = 0 \quad E[dW(t)dW(t)^T] = Q dt \dots (2)$$

(1)式の解は、状態遷移行列 $\Phi(t, \tau)$ を用いて、

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)dW(\tau) \dots (3)$$

で与えられる。この応答の $X(t)$ の共分散

$IR(t) = E[(X(t) - E[X(t)])(X(t) - E[X(t)])^T]$ で定義され、これは(2)(3)式より

$IR(t) = \Phi(t, t_0)IR_0\Phi(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)QB(\tau)^T\Phi(t, \tau)^T d\tau \dots (4)$ なお、 IR_0 は(1)式の初期値 X_0 の共分散である。(4)式を微分すると、 $IR(t)$ を支配する微分方程式が、次のように得られる。

$\dot{IR}(t) = A(t)IR(t) + IR(t)A(t)^T + IF(t) \quad IR(t_0) = IR_0 \dots (5)$ なお、式の簡略化のために、 $B(t)QB(t)^T$ を $IF(t)$ とした。(4)(5)式が不規則応答解析の基礎式である。

3. 定常応答解析 $A(t)$ および $IF(t)$ を定数行列(A , I とする)として、 $t \rightarrow \infty$ では、 $IR(t)$ は定常応答となる。すなわち、(5)式では、次の連立方程式に帰着する。 $AIR(t) + IR(t)A^T + I = 0 \dots (6)$

(5)式の等価な関係である(4)式より、次式を得る。

$$IR(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi(t, \tau)IF\Phi(t, \tau)^T d\tau \dots (7)$$

$A(t)$ が定数行列では、 $\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$ で表される。従って、(7)式は

$$IR(t) = \int_0^\infty e^{At} I F e^{A^T \tau} d\tau \dots (8)$$

となる。これは、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{Anh} I F h e^{A^T nh} \dots (9)$$

のように表すことにより、次のようなアルゴリズムが

得られることが知られている。⁽²⁾

$$Q_{k+1} = Q_k + e^{2hA} Q_k e^{2hA^T} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad Q_0 = IFh \dots (10)$$

ここで、 e^{Ah} の近似式として、Padé 近似を用いる。

$$e^{Ah} = (I - \frac{1}{2}hA + \frac{1}{12}h^2A^2)^{-1} (I + \frac{1}{2}hA + \frac{1}{12}h^2A^2) \dots (11)$$

このように、定常応答解析には、(6)式の未知数がマトリックス形式の微分方程式を、通常のベクトル形式の連立方程式にして解く解析と⁽¹⁾(10)式のアロリズムよりを用いて、収束計算により解析する二つの手法がある。

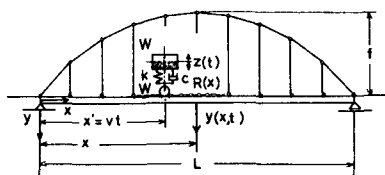


図-1 橋梁-車両系

4. 非定常応答解析 非定常応答解析の1つに、共分散方程式を、変数がベクトル形式の微分方程式に展開し、数値解析する方法がある。ここでは、Rde 近似を用いた、定常応答解析のアルゴリズムを適用した解析を提案する。

$t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $IR(t_{n+1}) = IR_{n+1}$, $A(t_{n+1}) = A_{n+1}$, $IF(t_{n+1}) = IF_{n+1}$ とする。(4)式より次の差分表示が得られる。

$$IR_{n+1} = \Phi(t_{n+1}, t_n) IR_n \Phi(t_{n+1}, t_n)^T + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau) IF(\tau) \Phi(t_{n+1}, \tau)^T d\tau$$

ここで、 $A(t)$, $IF(t)$ は、 Δt の区間では一定とする。このとき、状態遷移行列は、 $\Phi(t_{n+1}, t_n) = e^{A_n \Delta t}$ (13) で表され、(12)式は次のようになる。

$$IR_{n+1} = e^{A_n \Delta t} IR_n e^{A_n^T \Delta t} + \int_0^{\Delta t} e^{A_n(\Delta t-s)} IF_n e^{A_n^T(\Delta t-s)} ds$$

$$= e^{A_n \Delta t} (IR_n + J_n) e^{A_n^T \Delta t} \quad (14)$$

$$\text{ここに、} J_n = \int_0^{\Delta t} e^{-A_n s} IF_n e^{-A_n^T s} ds \quad (15)$$

この積分を実行し、式の変形を行うと、この積分は次式と等価であることがわかる。

$$A_n J_n + J_n A_n^T = -e^{-A_n \Delta t} IF_n e^{-A_n^T \Delta t} + IF_n \quad (16)$$

(6)式と(8)式が等価であることより、

$$J_n = e^{-A_n \Delta t} \int_0^{\infty} e^{A_n \sigma} IF_n e^{A_n^T \sigma} d\sigma e^{-A_n^T \Delta t} - \int_0^{\infty} e^{A_n \sigma} IF_n e^{A_n^T \sigma} d\sigma \quad (17)$$

$$= e^{-A_n \Delta t} \{ E_n e^{A_n^T \Delta t} - I \} E_n \quad (18)$$

ただし、 E_n は次式を満足する。 $A_n E_n + E_n A_n^T + IF_n = 0$ (19) 従って、最終的に次の差分式が得られる。

$$IR_{n+1} = e^{A_n \Delta t} (IR_n + E_n) e^{A_n^T \Delta t} + E_n \quad (20)$$

5. 数値解析と考察 定常および非定常応答解析の数値計算例として、図-1のような、単一走行車両によるランガ-桁橋の応答解析を考え、図-2は、時間刻みと、収束に至る回数および収束した値の関係を示している。 $H=0.025$ でも、10回程度で収束する。この場合の未知数は64個である。計算時間は、連立方程式による展開より若干短いようである。

図-2は、時間刻みによる応答の影響を調べたものである。

Rde近似によるアルゴリズムは、Runge-Kutta-Gill法と異って、時間刻みを大きくとっても発散しない。そこで、時間刻みを $h=0.02$ から増加させると、 $h=0.1$ までは、応答曲線は、図上で識別できる程変化しない。 $h=0.1$ 以上では、図のように、応答値は増加すると共に、位相に進みが表れているようである。このような誤差の原因としては、まず、系が時変系にあるにもかかわらず、係数行列および外力項を区間で一定にしていることであろう。本解法と、Runge-Kutta-Gill法との各種の比較は重要であるが、この点については、講演当日発表する予定である。

- 参考文献 (1) C.F.Chen and L.S.Shieh : Note on Expanding $PA + A^T P = -Q$, IEEE, Vol.AC-13, 1968
(2) E.J.Davison and F.T.Man : The numerical Solution of $A^T Q + QA = -C$, IEEE, Vol.AC-13, 1968
(3) E.J.Davison : The numerical Solution of $\dot{X} = A_1 X + X A_2 + D$, $X(0) = C$, IEEE, 1975

表-1 橋梁の諸元

項目	単位	値
スパン長	L (m)	130.2
ライズ	f (m)	19.2
橋梁重	W (ton)	433.327
車重		10
橋脚の幅	L/2 (cm)	6.3338
橋脚の長さ	L/4 (cm)	3.14
橋脚の重	W ₀	0.02
固有振動数と減衰率	f_n, δ_n	
第1振動モード	(m=1)	1.173 5.8883e10 1.2476e10 1.0228
第2振動モード	(m=2)	1.635 3.2479e10 5.8876e10 1.2100
第3振動モード	(m=3)	4.122 1.4797 5.6539e10 6.7358e10
第4振動モード	(m=4)	0.6582 6.7254
第5振動モード	(m=5)	2.632 6.7254
第6振動モード	(m=6)	5.923 6.7254

表-2 橋脚の固有特性と車重の固有特性

項目	単位	値
固有振動数	f_n (Hz)	10
固有振動数	f_n (rad/sec)	12.2
固有振動数	f_n (Hz)	2.2
固有振動数	f_n (Hz)	0.03

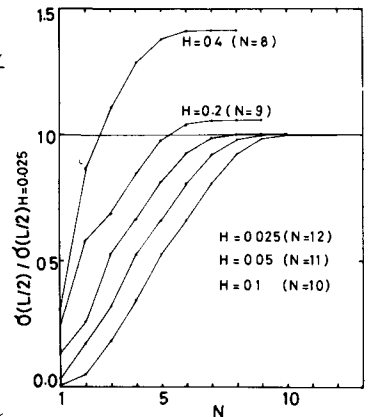


図-2 収束計算による定常応答

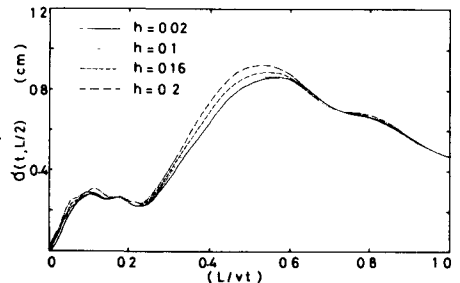


図-3 非定常応答に対する時間刻みの影響