203−8　　有限変形における増分形停留ポテンシャルエネルギーの原理　　855.α

熊本大学工学部　正員　　三池亮次

1．はじめに　変形の中間状態において表面力 $\mathbf{p}$ と物体力 $\mathbf{f}$ を受け　それよりの有限変位 $\Delta\mathbf{u}$ が生じ，物体内部に Green ひずみ増分 $\Delta\mathbf{E}_g$ が生じたものとする。この有限変位 $\Delta\mathbf{u}$ および Green ひずみ増分 $\Delta\mathbf{E}_g$ を変関数とする停留ポテンシャルエネルギーの原理を，シンボル記法に従い，条件付変分原理の手法を用い誘導する。またひずみが微小であるが，剛体的廻転変位は有限の幾何学的非線形の変形に対して，増分形ひずみエネルギー密度関数の一般形を示す。

2．中間状態からの有限変位を変関数とする停留ポテンシャルエネルギーの原理　変形の中間状態における物体内部の一点 P' が，増分後に有限変位 $\Delta\mathbf{u}=[\Delta u_1\ \Delta u_2\ \Delta u_3]^T$ を生じて P に達するものとする。点 P' および P の，空間に固定された右手系直交座標系における位置ベクトルを $\mathbf{x}'=[x_1'\ x_2'\ x_3']^T$ および $\mathbf{x}=[x_1\ x_2\ x_3]^T$ とすると

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}'+\Delta\mathbf{u} \tag{1}$$

である。なお，添字 T は転置記号である。この変形の中間状態を基準とした，増分後の Kirchhoff 応力テンソルを $\mathbf{T}_K$，Green ひずみ増分を $\Delta\mathbf{E}_g$ とする。また，中間状態における物体表面の面積要素 $\delta A'$ および体積要素 $\delta V'=dx_1'dx_2'dx_3'$ は増分後にそれぞれ δA，δV になるものとすると，

$$\mathbf{f}^*=\mathbf{f}\,\delta V/\delta V' \quad , \quad \mathbf{p}^*=\mathbf{p}\,\delta A/\delta A' \tag{2}$$

を定義し，汎関数

$$\Pi=\iiint \mathrm{trace}(\mathbf{T}_K\Delta\mathbf{E}_g)\,dV'-\iiint \mathbf{f}^*\cdot\Delta\mathbf{u}\,dV'-\iint \mathbf{p}^*\cdot\Delta\mathbf{u}\,dA' \tag{3}$$

の変関数 $\Delta\mathbf{u}$ に対する停留条件を求める。いま

$$\left(\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}'}\right)^T=\left[\frac{\partial\Delta u_1}{\partial\mathbf{x}'}\ \frac{\partial\Delta u_2}{\partial\mathbf{x}'}\ \frac{\partial\Delta u_3}{\partial\mathbf{x}'}\right]=[\Delta\mathbf{u}_1'\ \Delta\mathbf{u}_2'\ \Delta\mathbf{u}_3']\equiv\Delta\mathbf{U}'^T \tag{4}$$

とすると，式(3)の Green ひずみ増分 $\Delta\mathbf{E}_g$ は，

$$\Delta\mathbf{E}_g-\frac{1}{2}\left\{\Delta\mathbf{U}'+\Delta\mathbf{U}'^T+\Delta\mathbf{U}'^T\Delta\mathbf{U}'\right\}=\mathbf{0} \tag{5}$$

で与えられるので，式(3)の汎関数の代りに，上式(5)を付帯条件とし　$\Delta\mathbf{u}$ 以外 $\Delta\mathbf{E}_g$ をも変関数とする次式を汎関数として用いることが可能である。すなわち

$$\Pi=\iiint f(\mathbf{x}';\Delta\mathbf{E}_g,\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{U}')\,dV'-\iint H(\mathbf{x}';\Delta\mathbf{u})\,dA' \tag{6}$$

ここに

$$f(\mathbf{x}';\Delta\mathbf{E}_g,\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{U}')=\mathrm{trace}(\mathbf{T}_K\Delta\mathbf{E}_g)+\mathrm{trace}\left[\left\{\Delta\mathbf{E}_g-\frac{1}{2}(\Delta\mathbf{U}'+\Delta\mathbf{U}'^T+\Delta\mathbf{U}'^T\Delta\mathbf{U}')\right\}\mathbf{\Lambda}\right]-\mathbf{f}^*\cdot\Delta\mathbf{u} \tag{7}$$

$$H(\mathbf{x}';\Delta\mathbf{u})=-\mathbf{p}^*\cdot\Delta\mathbf{u} \tag{8}$$

とし　マトリックス $\mathbf{\Lambda}$ は Lagrange の未定係数で，$\mathbf{x}'$ の関数である。なお，式(7)の右辺第1項 $\mathrm{trace}(\mathbf{T}_K\Delta\mathbf{E}_g)$ の $\mathbf{T}_K$ は変関数 $\Delta\mathbf{E}_g$ には独立の定数とみなす。また，$\mathbf{p}^*$，$\mathbf{f}^*$ も $\Delta\mathbf{u}$ とは独立の定数である。Π の停留条件は，

$$\delta\Pi=\iiint\left[\mathrm{trace}\left(\delta\Delta\mathbf{E}_g^T\frac{\partial f}{\partial\Delta\mathbf{E}_g}\right)+\delta\Delta u_i\left\{\frac{\partial f}{\partial\Delta u_i}-\left(\frac{\partial f}{\partial\Delta\mathbf{u}_i'}\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right\}\right]dV'+\iint\delta\Delta u_i\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial\Delta\mathbf{u}_i'}\right)^T\mathbf{n}'+\frac{\partial H}{\partial\Delta u_i}\right\}dA'=0 \tag{9}$$

式(9)には，総和記法が用いてある。また　$\mathbb{T}=[\tau_1\ \tau_2\ \tau_3]$ とすると $\mathbb{T}\,\partial/\partial x=\partial\tau_\kappa/\partial x_\kappa$ である。式(9)を満足するEuler方程式として

$$\frac{\partial f}{\partial\Delta u}-\frac{\partial f}{\partial\Delta\mathbb{U}'}\frac{\partial}{\partial x'}=\mathbb{0} \tag{10}$$

および

$$\frac{\partial f}{\partial\Delta\mathbb{E}_g}=\frac{\partial}{\partial\Delta\mathbb{E}_g}\left\{\mathrm{trace}\left(\mathbb{T}_\kappa\Delta\mathbb{E}_g\right)+\mathrm{trace}\left(\Delta\mathbb{E}_g\Lambda\right)\right\}=\mathbb{T}_\kappa+\Lambda^{T}=\mathbb{0} \tag{11}$$

を得る。また境界において

$$\frac{\partial f}{\partial\Delta\mathbb{U}'}n'+\frac{\partial H}{\partial\Delta u}=\mathbb{0}\qquad \text{または}\quad \delta\Delta u=\mathbb{0} \tag{12}$$

が停留条件となる。式(7)の f の $\Delta\mathbb{U}'$ についての導関数は，式(11)を用い，Λ は対称となるので

$$\frac{\partial f}{\partial\Delta\mathbb{U}'}=\frac{\partial f}{\partial\Delta\mathbb{U}'}\mathrm{trace}\left\{-\frac{1}{2}\left(\Delta\mathbb{U}'+\Delta\mathbb{U}'^{T}+\Delta\mathbb{U}'^{T}\Delta\mathbb{U}'\right)\Lambda\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\Lambda^{T}+\Lambda+2\Delta\mathbb{U}'\Lambda\right)=\left(\mathbb{I}+\Delta\mathbb{U}'\right)\mathbb{T}_\kappa=\frac{\partial x}{\partial x'}\mathbb{T}_\kappa \tag{13}$$

である。また

$$\frac{\partial f}{\partial\Delta u}=-f^{*}\quad,\quad\frac{\partial H}{\partial\Delta u}=-p^{*} \tag{14}$$

であるから，式(11)と式(13)はそれぞれ

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\mathbb{T}_\kappa\right)\frac{\partial}{\partial x'}+f^{*}=\mathbb{0}\quad,\quad\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\mathbb{T}_\kappa\right)n'=p^{*}\ \ \text{または}\ \ \delta\Delta u=\mathbb{0} \tag{15}$$

となる。上式は中間状態を基準とした釣り合い式である。換言すればこれらの釣り合い式は，式(6)で定義される汎関数 Π の極値条件と等価である。Π はこの場合の全ポテンシャルエネルギーである。すなわち　有限変形における増分形停留ポテンシャルエネルギーの原理が誘導された。後藤が，幾何学的非線形解析に用いたエネルギー式は，式(3)の簡略化されたものである。

3．ひずみが微小の幾何学的非線形停留ポテンシャルエネルギーの原理　　ひずみは微小であるが，回転は有限の変形において，変形前に埋め込まれた座標系に対する中間状態および中間状態より増分後のひずみテンソルを，それぞれ $\mathbb{E}'^{**}$, $\mathbb{E}^{**}$ とするとその差 $\Delta\mathbb{E}^{**}$ は，変形前埋め込み座標が中間状態において形成する座標を固定座標系（近似的に直交直線座標系）とした場合のGreenひずみ増分 $\Delta\mathbb{E}_g$ に等しい。また，同じく変形前に埋め込まれた座標系に対する応力テンソルを $\mathbb{T}^{**}$ とし，$\mathbb{T}^{**}$ と $\mathbb{E}^{**}$ の間に通常の構成方程式

$$\mathbb{T}^{**}=2G\left(\mathbb{E}'^{**}+\Delta\mathbb{E}_g\right)+\lambda\,\mathrm{trace}\left(\mathbb{E}'^{**}+\Delta\mathbb{E}_g\right)\cdot\mathbb{I} \tag{16}$$

が成立するものとする。一方　全ポテンシャルエネルギー式(7)の右辺第一項は，式(11)に示すように $\Delta\mathbb{E}_g$ による導関数が $\mathbb{T}_\kappa$ となるような関数であれば，$\mathrm{trace}(\mathbb{T}_\kappa\Delta\mathbb{E}_g)$ でなくてもよい。したがって

$$\Delta\bar{U}=2G\,\mathrm{trace}\left\{\Delta\mathbb{E}_g^{T}\left(\mathbb{E}'^{**}+\frac{1}{2}\Delta\mathbb{E}_g'\right)\right\}+\lambda\,\mathrm{trace}(\Delta\mathbb{E}_g)\left\{\mathrm{trace}\left(\mathbb{E}'^{**}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}(\Delta\mathbb{E}_g)\right\} \tag{17}$$

を，$\mathrm{trace}(\mathbb{T}_\kappa\Delta\mathbb{E}_g)$ の代りにひずみエネルギー関数として用いることが可能となる。上式は，Martinの論文に見られる

$$\Delta\bar{U}=E\left(\varepsilon'\Delta\varepsilon+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^{2}\right)\ ,\qquad \text{ここに}\quad \Delta\varepsilon=\frac{\partial\Delta u_1}{\partial x'}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_2}{\partial x'}\right)^{2} \tag{18}$$

を一般化したものである。ε' は骨組構造部材軸方向の中間状態における伸び率で $\Delta\varepsilon$ はその増分である。