

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 米倉真一

1. 緒言 柱や骨組構造物に周期的軸力が作用する場合、タンク内の液体が鉛直方向の振動を受けた場合のスロッシングおよび脈動流によるパイプの安定性などの係数励振不安定問題(動的安定問題)はMathieu-Hillの方程式に支配される。係数励振不安定問題は工学上重要な問題であるために、その不安定領域の決定法に関する研究はこれまで相当詳しく行われているが、いまだに厳密解といったものは提案されていない。ほとんどすべての問題が漸近法に基づくHsuの方法および特性方程式の根を求めるBolotinの方法などの近似解法にしたがって解析されている¹⁾。しかも、いずれの解法も十分条件だけを満足するもので、必要なすべての解を与えることは不可能である。著者は先に連続体の非線形振動の振幅安定判別法として連立のHillの方程式の固有値問題による解法^{2,3)}を提案している。そこで、同じ解法を係数励振不安定問題の不安定領域の決定に応用したところ、ほぼ十分な結果がえられたので、本研究において報告するものである。

2. 解法 係数励振不安定問題の運動方程式の形は構造形式および負荷形式によって異なるが、いずれの場合を取扱っても同じであるので、ここではBolotinによって取扱われた問題を対象にする。運動方程式を時間に関する一般座標を用いて表わせば、次のような連立常微分方程式がえられる。

$$C\ddot{x} + 2CH\dot{x} + (E - \alpha A)x - \varepsilon B \cos \theta x = 0 \quad (1) \quad \text{ここに、} \alpha, \varepsilon, \theta: \text{パラメーター}$$

C : 対角行列 H : 減衰行列 E : 単位行列 A, B : 荷重の係数行列 x : 変位ベクトル
減衰行列は直交性の仮定に基づいて対角化されているが、以下の解析に先立って行列の積の交換則が成立する単位行列 E に変換できる場合を取扱う。すなわち減衰定数の大きさは各モードとも一定であるものとする。

いま、 $x = e^{i\lambda t}x$ のようにおき、 $e^{i\lambda t}$ が特異行列でないことを考慮すれば

$$Cx + (E - CH^2 - \alpha A - \varepsilon B \cos \theta)x = 0 \quad (2)$$

となる。上式の解を次のように仮定する。

$$x = e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{2} k_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \sin k_j \theta t + b_j \cos k_j \theta t) \right\} \quad (3) \quad \lambda: \text{未定変数 } k_0, a_j, b_j: \text{時間に無関係なベクトル}$$

式(3)を式(2)に代入すれば k_0, a_j および b_j を求めるための同次方程式がえられる。

$$Dx = 0 \quad (4) \quad \text{ここに、} D: \text{係数行列 } x = \{k_0, b_1, b_2, b_3, \dots, a_1, a_2, a_3, \dots\}^T$$

行列 D の性質から、上式は次のように書き改められる。 $Dx = \{M_0 - \lambda M_1 - \lambda^2 M_2\}x = 0 \quad (5)$

いま、 $y = \lambda x$ なる新しいベクトル y を導入すれば、式(5)は D の大きさの2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ M_1^T M_0 & -M_1^T M_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(6)の左辺の行列は実係数の非対称行列であるから、その固有値は一般に共役な複素数である。式(1)に含まれるパラメーターである荷重振幅 ε および励振円振動数 θ に対して、算出された固有値の実数部から減衰定数を引いた値がすべて負ならば、式(3)の一般解に含まれる $e^{i\lambda t}$ が時間とともに収束するために安定で、逆に一つでも正ならば $e^{i\lambda t}$ が発散するためにflutter形の不安定というLiapunovの安定性の定義を用いて、直接系の安定、不安定を検討することができる。

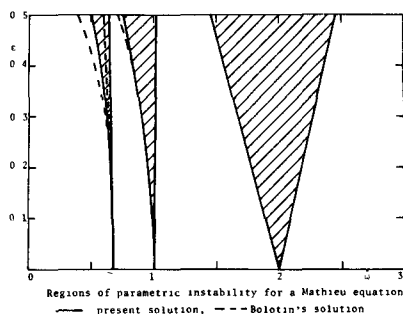


図 - 1

3. 適用例 (1) 自由度系のMathieuの方程式(両端単純支持柱の動的安定問題)

本題の微分方程式は次のように与えられる。

$$\ddot{x} - \bar{\omega}^2 (1 - 2\varepsilon \cos \tau) x = 0 \quad (7)$$

励振振動数 $\bar{\omega}$ と荷重強度 ε との関係をプロットすれば図-1の実線の結果をうる。斜線部が不安定領域に対応し、 $\bar{\omega}=2.0$ の主不安定領域の他に、 $\bar{\omega}=1.0$ および $2/3$ に生ずる第2、3の副不安定領域がえられている。本法の収束はきわめて速くフーリエ級数の項数は3項($b_0, b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3$)で十分である。点線は実用に供されているBolotinの近似解であるが、本法とよく一致しているといえる。

(2) 2自由度系のMathieuの方程式(はりの曲げおよびねじりの動的安定問題)

静荷重および周期的変動荷重を受けるはりの動的安定問題の不安定領域を図-2に示す。 $2\omega_1, 2\omega_1/3$ および $2\omega_2, 2\omega_2/3, \omega_1$ に生ずる各自由度の単純共振の他に、 $(\omega_1 + \omega_2)$ に生ずる和形の曲げ、ねじりの結合共振がえられている。比較、対照のためにHsuの方法によってえられた結合共振およびBolotinの方法によってえられた各自由度の単純共振の不安定領域がそれぞれプロットされている。本法によればHsuの漸近法のようなきわめて多くの労力を要することなく必要かつ十分な解がえられていることがわかる。

(3) 3自由度系のMathieuの方程式(保存、従動周期的変動荷重を受ける片持ちはりの動的安定問題)

片持ちはりを3自由度系で近似した場合の保存および従動周期的変動荷重に対する不安定領域を図-3, 4に示す。表-1には各ケースの現象の分類と不安定領域の $\varepsilon=1.0$ に対する周波数領域が示されている。従動荷重の場合には ω_1, ω_2 および ω_1, ω_2 のように差形の結合共振がえられている。負荷方法によって生ずる現象が異なることおよび生ずる周波数の幅が異なることがわかる。

(4) 減衰を考慮した1自由度系のMathieuの方程式

(1)と同じ問題に対して減衰を考慮した場合($\delta=0.05$)に対する不安定領域を示せば図-5のとおりである。本法が減衰を含む場合にも適用できることが示されている。

4. 結語 以上により固有値問題によって係数励振振動系の各種の不安定領域が同時に求められることが示された。本法の適用範囲、実験との比較については講演時に発表の予定である。参考文献 1) V. V. Bolotin: The Dynamic Stability of Elastic Systems (1964) 2) K. Takahashi: Journal of Sound and Vibration, Vol 66, No. 4 (1979) 3) 高橋、河原、山辺: 土木学会論文報告集, 第293号 (1980/1)

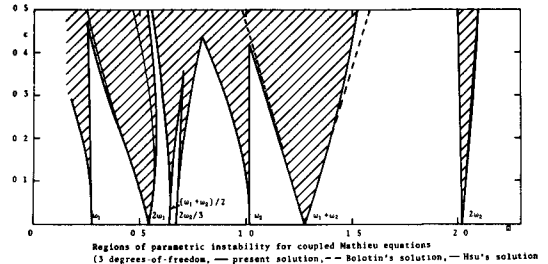


図-2

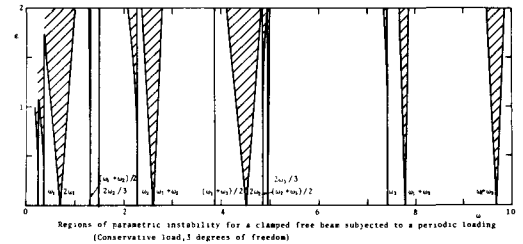


図-3

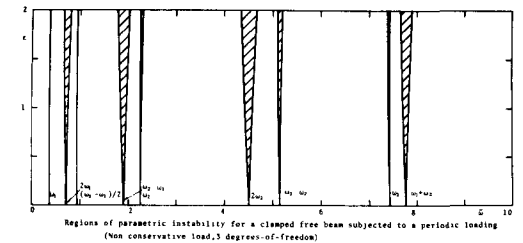


図-4

表-1

Regions of parametric instability for a clamped free beam subjected to a periodic loading			
	Frequency	Conservative load	Non conservative load
Simple resonance	$2\omega_1$	0.12-0.88	0.68-0.75
	ω_1	0.27-0.37	0.56
	$2\omega_2$	4.22-4.78	4.43-4.60
	$2\omega_2/3$	2.21-2.27	2.23-2.27
	ω_2	1.50	
	$(\omega_1 + \omega_2)/2$	14.83-15.86	14.75-14.94
Combination resonance (sum type)	$\omega_1 + \omega_2$	7.40-7.43	7.40-7.43
	$2\omega_2/3$	4.94	
	$\omega_1 + \omega_2$	2.50-2.72	
	$(\omega_1 + \omega_2)/2$	1.51	
	$\omega_1 + \omega_2$	7.72-7.85	7.71-7.85
	$(\omega_1 + \omega_2)/2$	3.88-3.90	
Combination resonance (difference type)	$\omega_2 - \omega_1$	9.85-9.77	
	$(\omega_2 - \omega_1)/2$	4.94-4.87	
	$\omega_2 - \omega_1$		1.83-1.97
	$(\omega_2 - \omega_1)/2$		0.94-0.96

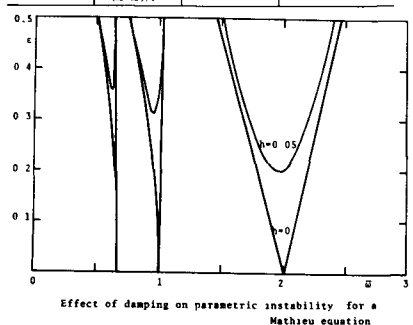


図-5