

長崎大学工学部 正 員・高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 田井清秀

1 緒言 吊橋の振動特性は他の橋梁構造と比較して直達安全性と連なるものがあるために、その解析はきわめて重要な意味を持つ。この第一段階として吊橋の固有振動性態を把握しておく必要がある。これよりの吊橋の固有振動解析法として微分方程式法、積分方程式法、有限個の質点系に近似する方法、ガウーキン法およびエネルギー法などがあるが、このうちガウーキン法もしくはエネルギー法による解法が採用され実用に供されている。しかしながら、側径間がある場合や、ケーブルが塔頂と塔に固定されている場合、補剛桁の支持条件が単純支持ではなく、連続である場合などではガウーキン法などでは変位関数の仮定が困難となってくるために、その適用には制約がある。そこで本研究では吊橋の固有振動解析に有限要素法の適用を試みにものである。有限要素法による吊橋の固有振動解析の第一段階として吊橋の非連続の鉛直、ねじりおよび水平振動について振動解析を行い、ガウーキン法による解および起振試験による実測値との比較を報告するものである。

2 解析にあたり、その基本的仮定

文献(1)、(2)に示されている吊橋の振動理論

と同じであるが、本論で特別に用いられている仮定は次のとおりである、

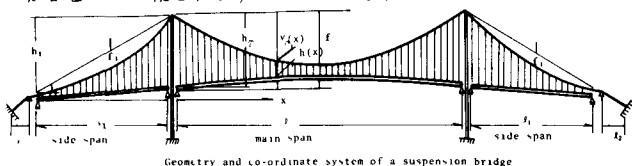


図-1

(1) 振動の振幅は十分に小さく、ケーブルの変位

による吊橋水平張力 H_p は死荷重による水平張力 H_0 に比較して小さい。(2) 吊橋のハンガーは補剛桁の中心に取り付けられており、補剛桁の道路曲線による初期曲率は十分に小さく無視できる。したがって、補剛桁のねじりと水平変位はそれぞれ独立に生ずる。(3) 減衰の影響を無視する。

3 吊橋の振動のエネルギー 図-1に示すような吊橋を対象とする。

3.1 鉛直振動のエネルギー ケーブルのひずみエネルギー V_c は死荷重による初期応力 T_0 一足による張と活荷重による付加応力 T_c による張との和を与えられ、次のように表わされる。

$$V_c = \frac{H_0}{2} \int_0^L (y_c'^2 + \frac{1}{2} u'^2) dx + \frac{H_p}{2} \int_0^L (y_c'^2 + \frac{1}{2} u'^2) dx \quad (1) \quad \text{ここに、} y_c' \text{ ケーブルの形状、} u' \text{ ケーブルの鉛直変位、} ' \text{ は } x \text{ に関する微分を小す。} L \text{ : 全径間長、} H_p = \frac{E_c A_c}{L_c} \frac{\delta}{\delta'} \int_0^L u dx \quad (2)$$

ケーブルの形状 y_c が定数であることおよび高次の微分項を無視すれば、式(1)は次のように書き改められる。

$$V_c = \frac{1}{2} (2H_0 \int_0^L u'^2 dx - H_p \int_0^L y_c'^2 dx) \quad (3) \quad \text{ここに、} y_c' = -\frac{\delta}{\delta'} \frac{1}{L}$$

上式の第1項はケーブルの形状変化によるもので、第2項はケーブルの弾性変形によるものである。

吊橋のハンガーの伸びは無視することとできるので、補剛桁の鉛直変位はケーブルのそれと同じく u であり、その曲げによるひずみエネルギーは

$$V_r = \frac{1}{2} E \int_0^L I_r u''^2 dx \quad (4) \quad \text{ここに、} E \text{ : 補剛桁の弾性係数、} I_r \text{ : 補剛桁の鉛直方向の断面2次モーメント}$$

一方、運動エネルギーは次のように与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (W_r + W_c) \dot{u}^2 dx \quad (5) \quad \text{ここに、} \ddot{u} \text{ : 重たの加速度、} W_r, W_c \text{ : 補剛桁およびケーブルの重量 (t/m)}$$

3.2 おじり振動のエネルギー

$$V_c = \frac{H_0 b}{8} \int_0^L \varphi'^2 dx + \frac{E_c A_c}{L_c} \left(\frac{\delta}{\delta'} \int_0^L \frac{\delta \varphi}{\delta'} \right) \int_0^L \varphi dx \quad (6) \quad V_r = \frac{E}{2} \int_0^L I_r \varphi'^2 dx + \frac{G}{2} \int_0^L K \varphi'^2 dx \quad (7)$$

$T = \frac{1}{2} \int_0^L (r^2 W_r + \frac{b}{4} W_c) \dot{\varphi}^2 dx \quad (8) \quad \text{ここに、} b \text{ : 補剛桁の幅、} E I_r \text{ : 曲げおじり剛性、} G K \text{ : おじり剛性、} r \text{ : 回転半径、} \varphi \text{ : おじり}$

3.3 水平振動のエネルギー³⁾

$$V_c = 2Hw \left(\frac{1}{2} \int_0^L \dot{V}^2 dx + \frac{1}{2} \frac{W_c + W_b}{Hw} \int_0^L \frac{\dot{V}^2}{2g} dx \right) \quad (9)$$

$$V_g = \int_0^L W_b \left(\frac{\dot{V}^2}{2g} \right) dx + \int_0^L W_b \left\{ \frac{\dot{V}^2}{2g} + \frac{(V - \dot{V})^2}{2h} \right\} dx \quad (11)$$

$$T_g = \frac{1}{2} \int_0^L W_b \left(\frac{\dot{V}^2}{2g} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L W_b \left\{ \frac{\dot{V}^2}{2g} + \frac{(V - \dot{V})^2}{2h} \right\} dx \quad (13)$$

$$V_c = \frac{1}{2} \int_0^L I_A V'^2 dx \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L W_c \dot{V}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L W_b \dot{V}^2 dx \quad (12)$$

ここに、 $V, \dot{V}$: 補剛桁およびケーブルの水平変位、
 V_g, T_g : ケーブルおよび補剛桁の水平変位に付随する鉛直変位 $U_c = \frac{\dot{V}^2}{2g}$, $U_b = \frac{\dot{V}^2}{2g} + \frac{(V - \dot{V})^2}{2h}$ によるエネルギー

4 有限要素法による解法 有限要素法を用いて吊橋の離散化を行う。1 節点の自由度は鉛直振動およびねじり振動の場合 2 個、水平振動の場合 3 個である。本論では鉛直振動についてのみ定式化を述べる。吊橋の要素 e についての変位 U_e は次のように表わされる。 $U_e = \{f_e \{ \xi_1, \xi_2 \}^T \{ \psi(\xi) \}_e\}^T$ (14) ここに、 a : 節点長、 $\xi_1 = 1 - \xi/a$, $\xi_2 = \xi/a$, $\{ \psi(\xi) \}_e$: 節点変位ベクトル ($= \{u_L \ u_R \ u_R \ u_R\}^T$)

式(14)を用いて構造全体の剛性行列および質量行列が次のように求められる。

$$K_c = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_0^a E I_A \{f_e\}_e^T \{ \psi(\xi) \}_e \{f_e\}_e^T \{ \psi(\xi) \}_e d\xi = \frac{1}{2} \{1\}^T [K_c] \{1\}$$

$$K_b = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_0^a 2Hw_b \{f_e\}_e^T \{ \psi(\xi) \}_e \{f_e\}_e^T \{ \psi(\xi) \}_e d\xi = \frac{1}{2} \{1\}^T [K_b] \{1\} \quad (15)$$

$$K_g = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_0^a \frac{2E_c A_c}{L_E} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \right) \{f_e\}_e^T \{ \psi(\xi) \}_e \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_j}{\partial \xi} \right) \{f_e\}_e^T \{ \psi(\xi) \}_e d\xi = \frac{1}{2} \{1\}^T [K_g] \{1\}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_0^a \frac{W_c + W_b}{g} \{f_e\}_e^T \{ \psi(\xi) \}_e \{f_e\}_e^T \{ \psi(\xi) \}_e d\xi = \frac{1}{2} \{1\}^T [T] \{1\}$$

式(15)を用いて Hamilton の原理から吊橋全体の運動エネルギーがえられる。吊橋の固有振動数および固有振動形は通常の行列の固有値問題を用いて求めることができる。

表-1

Natural frequencies of Kanmon Bridge

		Node number	FEM (Hz)	Calc (Hz)	Exp (Hz)	Calc FEM	Exp FEM
vertical vibration	sym.	1	0.204	0.200	0.212	0.98	1.04
		2	0.276	0.270	0.298	0.98	1.08
		3	0.433	0.429	—	0.99	—
		4	0.551	0.528	0.570	0.96	1.03
		5	0.964	0.914	0.918	0.95	0.95
	antisym.	1	0.154	0.152	0.180	0.99	1.17
		2	0.378	0.375	—	0.99	—
		3	0.388	0.391	—	1.01	—
		4	0.739	0.705	0.740	0.95	1.00
	torsional vibration	sym.	1	0.407	0.384	0.387	0.94
2			0.796	0.766	0.717	0.96	0.90
antisym		1	0.514	0.492	0.472	0.96	0.92

表-2

Comparisons of Horizontal Vibrations of Iirado Bridge

order \ method	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FEM(N0.1)	0.157	0.440	0.676	0.694	0.912	1.040	1.074	1.309	1.487	1.710
FEM(N0.2)	0.125	0.430	0.581	0.597	0.867	1.002	1.013	1.252	1.430	1.659
Galerkin	0.127	0.431	0.516	0.571	0.781	0.962	0.984	1.174	1.381	1.723

No.1 upward distortion of cable is considered

No.2 upward distortion of cable is not considered

結果の間にかなりの差がある。特に 1 次振動では FEM (N0.2) の振動数が 30% 程度高い。ガラーキン法を適用する際に用いた運動方程式にケーブルおよび補剛桁の水平変位に付随する鉛直変位がケーブルおよび補剛桁の重量に対して貯える重力エネルギーの項が含まれていないことによるものと考えられる。これを明らかにするために有限要素法の定式化から対応する重力エネルギーの項を消去して計算した結果を表-2 の FEM (N0.2) の欄に示す。ガラーキン法との対応は FEM (N0.1) よりもはるかに良好になることが確認される。なお、水平振動はこれまで観測された例がなく、線形の第一近似値程度の興味を持つものである。解の収束性および固有振動特性は離散化に発生の予定である。

参考文献 1) 平井: 鋼橋 (II), 技術堂, 昭和 42 年, 2) 向橋・豊井 平野: 土木学会論文報告集, 第 247 号, 1978. 9, 3) Abdel-Ghaffar, A M: Proc ASCE, Vol 104, NO ST3, 1978, 4) 日本道路公団: 関門橋工事報告書 第 5 編, 土木学会, PP 1100 ~ 1112, 昭和 53 年